2025 年 USAKNMO 模拟赛

2025-08-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a035c4f0f1a1d03a

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年 USAKNMO 模拟赛

程国根　译

第一天

1. 不等边三角形 ABC 中，从顶点 A,B,C 分别向对边 BC,AC,AB 作高线，垂足依次为 D,E,F．设 M 为 BC 的中点．$\triangle AEF$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P（异于 A）．$\triangle ADM$ 的外接圆与 AB、AC 分别交于点 X、Y（异于 A）．证明：$\triangle PXY$ 的垂心是 $\triangle PBC$ 的垂心与 $\triangle PEF$ 的垂心的中点．

2. 一场聚会上共有 262144 人．已知每个人至多有 256 个朋友，且任意 3 人都不彼此认识．证明：存在一个由 1024 人组成的集合，其中所有人彼此都不认识．

3. 设 p 为素数，x,y,z 为整数，且满足 $0<x,y,z<p$．记 $N(p,x,y,z)$ 为同余方程 $1+yza^2+zxb^2+xyc^2\equiv 0 \pmod p$ 的解 (a,b,c) 的个数，其中 a,b,c 为整数，且满足 $0\le a,b,c\le p-1$．试用 p,x,y,z 表示 $N(p,x,y,z)$．

第二天

4. 求所有函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}^+$，都有

$$xyf(x+y)=y(3y+x)f(x)+x(3x+y)f(y).$$

5. 求所有正整数 $n>3$，使得

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{a+b+c=n\\ a,b,c>0}}\frac{1}{abc}\sin(\pi a/n)\sin(\pi b/n)\sin(\pi c/n)\binom{2a-2}{a-1}\binom{2b-2}{b-1}\binom{2c-2}{c-1}}{\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)}$$

是一个整数，并证明．

6. 设正实数 a,b 满足 $2b<a$，n 为正偶数．定义实数列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，满足 $x_0=0$，$x_n=2b$，$x_{n/2}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$，且对任意 $1\le k\le n-1$，$x_k^2-x_{k-1}x_{k+1}$ 均为与 k 无关的常数．定义实数列 y，满足 $y_{n+1}=y_0$，且对任意 $0\le k\le n$，y_k 为二次方程 $(x_k^2-a^2)y_k^2-(2bx_k)y_k+a^2=0$ 的较大根．求最小的常数 M，使得对任意满足条件的 a,b,n，都有

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{y_ky_{k+1}}-y_ky_{k+1}\right)<M\cdot\frac{nb^2}{a^2-b^2}.$$

1

AoPS 上的一个模拟赛，赛制同 USAMO.