用非正常方法带你 20 分钟速通广东预赛填空

2025-05-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a0643f6203f462a1

周六考完当天晚上，笔者花了 20 分钟，用各种不严谨的“非正常方法”，完美速通了这次广东预赛的填空题，这里作个记录。

本文纯属娱乐，请勿模仿！请勿模仿!!

第 1 题

已知 $e^{x-1}\ln x+e^{y-1}\ln y=\ln xy$，则 $x+y=$_____.

容易观察到 $x=y=1$ 时，等式成立，故 $x+y=2$.

第 2 题

随机选择正八面体的三个面，这三个面的中心构成的三角形是正三角形的概率为_____.

p 的分母应为 $\mathrm{C}_8^3=56$，由对称性，固定一个面后，分母也可以为 $\mathrm{C}_7^2=21$. 故分母应为它们的最大公约数 7. 大概估个量级，猜 $p=\dfrac{1}{7}$.

第 3 题

已知三角形 ABC 的外心 O 满足 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\sin A=$_____.

构造 $\triangle XYZ$，使得三边长分别为 $2R,3R,4R$. 则 $\overrightarrow{XY}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{YZ}=3\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{ZX}=4\overrightarrow{OC}$. 由余弦定理：

$1-2\sin^2 A=\cos(\pi-2A)=\frac{4^2+3^2-2^2}{2\times4\times3}$

解得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

第 4 题

已知三次多项式 $f(x)$ 满足 $f(m)=\dfrac{1}{m}\ (m=1,2,3,4)$，则 $f(5)=$_____.

设 $g(x)=xf(x)-1$，则 $g(x)$ 为四次多项式，常数项为 -1，且四个根为 $1,2,3,4$，于是

$g(x)=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}$

因此 $5f(5)-1=g(5)=-1$，即 $f(5)=0$.

第 5 题

设 $ABCD$ 是一个正方形，点 E 在正方形内，满足 $AE\perp DE$，且 $\angle EBC=\angle EAB+45^\circ$. 若 $AE=1$，则 BE 的长度为_____.

导角易证 $\angle EDA=\angle EAB=\angle EBD$，于是 $\triangle ABE\sim\triangle BDE$，$BE=AE\cdot\frac{BD}{AB}=\sqrt{2}$.

第 6 题

已知正实数 a,b 满足对任意的实数 x 均有 $a\cos 2x-b\cos x\geq -2$，则 $2a+b$ 的最大值为_____.

令 u=cos x∈[-1,1]，则条件化为 $2au^2-bu-a\geq -2$（$-1\leq u\leq 1$）。

取 u=0,1 分别得 a≤2、b≤2。若 b>4a，左端在区间上的最小值为 −b，从而 2a+b<3<4+√2。

否则极小点 u=b/(4a) 在区间内，故 $a+b^2/(8a)\leq 2$，进而 $a\leq 1+\sqrt{(1-b^2/8)}$。所以 $2a+b\leq 2+2\sqrt{(1-b^2/8)}+b\leq 4+\sqrt{2}$；最后一个函数在 0≤b≤2 上递增。

取 a=1+1/√2、b=2 时极小值恰为 −2，故最大值为 4+√2。

第 7 题

定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x),g(x)$ 满足：

$$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y),$$

$$g(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y),$$

$g(0)\neq\frac{1}{2}$，$g(x)$ 为偶函数，且 $g(x)>0$ 恒成立. 已知 $f(2)+g(2)=\frac{\sqrt{5}}{15}$，则 $f(8)-g(8)=$_____.

令 $f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$，$g(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

于是 $f(2)+g(2)=a^2=\frac{\sqrt{5}}{15}$，$f(8)-g(8)=-a^{-8}=-2025$.

第 8 题

平面上有三个同心圆 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$，半径分别为 $1,2,3$. 任取三个点 A_1, A_2, A_3，满足点 A_i 在圆 Γ_i 上（$i=1,2,3$），则 $|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1|^2$ 的最大值为_____.

猜测 $A_1(-1,0),A_2(-2,0),A_3(3,0)$ 时，取得最大值 42.

第 9 题

已知双曲线 $G:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，斜率为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线 l 与 G 的左右两支分别交于 A,B 两点. 点 $Q(-1,2)$ 不在 l 上，直线 AQ,BQ 分别交 G 于另一点 C,D. 若 $CD\parallel l$，则 G 的离心率为_____.

取 AB,CD 中点 M,N，熟知 M,Q,N 共线. 则

$k_{OM}\cdot k_{AB}=k_{ON}\cdot k_{CD}=e^2-1$

由 $k_{AB}=k_{CD}$ 知 $k_{OM}=k_{ON}$，即 O,M,Q,N 共线.

于是 $e^2-1=k_{OQ}\cdot k_{AB}=1$，即 $e=\sqrt{2}$.

第 10 题

从集合 $S=\{1,2,3,\cdots,30\}$ 中选出个位数字互不相同的 10 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$，其中任意两个数相差不为 3 或 27. 这样的 10 元子集 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$ 共有_____种不同的取法.

将全体元素排列如下表：

1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
11	14	17	20	23	26	29	2	5	8
21	24	27	30	3	6	9	12	15	18

于是每行不能取相邻数字（首尾也视为相邻），每列恰取一个数字. 本题等价于对首位相接的 10 个扇形的三染色，满足相邻扇形不同色的方法数.

解答（PDF 中已展开）

答案为 $2^{10}+2\times(-1)^{10}=1026$.