数学竞赛每日一练第 3 期解答

2021-06-06 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a28a23d36b89dc89

1. 求由 63 个不全相等的整数构成的可重集合，使得其中每一个数的平方等于其余所有数之和.

解答（PDF 中已展开）

解答设所求的 63 个整数为 x_1，x_2，$\cdots$，x_{63}. 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{63}x_i$.

由题意知：$x_i^2=S-x_i$，于是所有 x_i 均为 $X^2+X-S=0$ 的根.

于是这 63 个整数恰有两个不同的取值（由于它们不全相等）. 由韦达定理可设其为 k 和 $-1-k$，且 $k(k+1)=S$.

设这 63 个数中有 m 个 $-1-k$，$63-m$ 个 k，其中 $m\in\{1,2,\cdots,62\}$.

于是 $S=m(-1-k)+(63-m)k=k(k+1)$.

即 $m=\dfrac{-k^2+62k}{2k+1}$，也即

$$-4m=2k-125+\frac{125}{2k+1}$$

于是 $2k+1\in\{\pm1,\pm5,\pm25,\pm125\}$.

逐一代入检验得：$k=-13$，$m=39$；$k=-3$，$m=39$；$k=2$，$m=24$；$k=12$，$m=24$ 符合题意.

于是本题的答案为：
39 个 12 和 24 个 -13 或 39 个 2 和 24 个 -3.

1. 是否对于任意的 $n\geq2021$，均存在 n 个不全相等的整数，使得其中每一个数的平方等于其余所有数之和.

解答（PDF 中已展开）

解答设所求的 n 个整数为 x_1，x_2，$\cdots$，x_n. 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

由题意知：$x_i^2=S-x_i$，于是所有 x_i 均为 $X^2+X-S=0$ 的根.

于是这 n 个整数恰有两个不同的取值（由于它们不全相等）. 由韦达定理可设其为 k 和 $-1-k$，且 $k(k+1)=S$.

设这 n 个数中有 m 个 $-1-k$，$n-m$ 个 k，其中 $m\in\{1,2,\cdots,n-1\}$.

于是 $S=m(-1-k)+(n-m)k=k(k+1)$.

即 $m=\dfrac{-k^2+(n-1)k}{2k+1}$，也即

$$-4m = 2k + 1 - 2n + \frac{2n-1}{2k+1}$$

若 $2n-1$ 为素数，则

$$2k + 1 \in \{-2n+1, -1, 1, 2n-1\}$$

$2k+1 = -2n+1$ 时，可得 $m = n$，矛盾!

$2k+1 = -1$ 时，可得 $m = n$，矛盾!

$2k+1 = 1$ 时，可得 $m = 0$，矛盾!

$2k+1 = 2n-1$ 时，可得 $m = 0$，矛盾!

于是对于使 $2n-1$ 为素数的 n，不存在满足题意的 n 个正整数，故结论不成立.