2023 年上海市高三数学竞赛试题解答

2023-03-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a3cc3e31b02042cc

http://cdn.jiuzhangzaixian.com/media/permanent_file/2023/03/27/16798820091332023%E5%B9%B4%E4%B8%8A%E6%B5%B7%E5%B8%82%E9%AB%98%E4%B8%89%E6%95%B0%E5%AD%A6%E7%AB%9E%E8%B5%9B%E8%AF%95%E5%8D%B7.pdf

想先自己思考的读者可以做完后再来看本文的解答。

1. 若不等式 $\log_a x > \tan x$（$a>0, a\neq 1$）对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 均成立，则实数 a 的取值范围是 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\left[\dfrac{\pi}{4},1\right)$

1. 将一枚硬币和一个骰子同时投掷，硬币出现正面记为 2，出现反面记为 1，此数与骰子的点数之积记为 x(例如硬币出现正面，骰子点数为 3，则 $x=2\times 3=6$)，那么 x 的数学期望是 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{21}{4}$

1. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$，$AA_1=2$，P 是平面 A_1BC 上一动点，且 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则满足上述条件的所有的点 P 所围成的平面区域的面积等于 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{36\pi}{5}$

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^3-ax$ 有两条互相平行的切线，若这两条切线的斜率均为 1，且两条切线之间的距离为 8，则实数 a 的值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： 5

1. 正整数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 构成一个严格增的等比数列，且满足 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=211$，则 $a_1=$_____，公比 $q=$_____.

解答（PDF 中已展开）

答案： 16，$\dfrac{3}{2}$

1. 已知曲线 Γ 的方程是 $x|x|+y|y|=1$，若过点 $A(1,0)$ 的直线 l 与 Γ 恰有三个不同的交点，则直线的倾斜角的取值范围是 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1. 给定正实数 k，对任意正实数 a,b，记 $m=\min\left\{a,\dfrac{b}{ka^2+b^2}\right\}$，则 m 的最大值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{k}}}$

1. 十进制六位数 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ 中，每个数码 $a_i(1\le i\le 6)$ 都是奇数，且其中出现的数码 1 不允许相邻（例如，135131，577797 满足条件，而 311533 不满足条件）则这种六位数的个数是 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： 13056

1. 已知抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 与双曲线 $y=-\dfrac{1}{x}$ 相交于点 R, 抛物线与双曲线的公切线分别与**抛**物线、双曲线相切于点 S、T. 求证：对于任意正实数 p，$\triangle RST$ 的面积为与 p 关的常数，并求该常数.

解答（PDF 中已展开）

证明：

联立

$$\begin{cases}y^2=2px\\ y=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

，得 $R\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2p}},-\sqrt[3]{2p}\right)$.

设 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，则熟知抛物线在 S 处的切线方程为

$$y_1y=p(x+x_1)$$

双曲线在 T 处的切线方程为

$$y-y_2=\frac{1}{x_2^2}(x-x_2)$$

上面两个方程表示同一条直线，于是

$$\begin{cases} \dfrac{p}{y_1}=\dfrac{1}{x_2^2} \\ \dfrac{px_1}{y_1}=y_2-\dfrac{1}{x_2} \end{cases}$$

结合 $y_1^2=2px_1$，$y_2=-\dfrac{1}{x_2}$ 可解得

$$S\left(2\sqrt[3]{\frac{4}{p}},2\sqrt[3]{2p}\right),T\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{p}},\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right)$$

设 $a=\sqrt[3]{\dfrac{4}{p}}$，$b=\sqrt[3]{\dfrac{p}{4}}$，则 $ab=1$，$R(\dfrac{1}{2}a,-2b)$，$S(2a,4b)$，$T(-a,b)$.

注意到 ST 中点 $M(\dfrac{1}{2}a,\dfrac{5}{2}b)$，有 RM 平行于 y 轴.

于是

$$\begin{aligned} S_{\triangle RST}=&\frac{1}{2}MR\cdot|x_S-x_T| \\ =&\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{9}{2}b\right|\cdot|3a| \\ =&\frac{27}{4} \end{aligned}$$

因此，$\triangle RST$ 的面积为定值 $\dfrac{27}{4}$.

1. 设集合 $M=\{1,2,\cdots,2023\}$，对 M 的子集 $A=\{a_1,\cdots,a_k\}$ 令它对应一个数 $\alpha=(-1)^{a_1+\cdots+a_k}$(空集对应的数 $\alpha=(-1)^0=1$). 对 M 的所有子集 A，求它们对应的数的总和 $\sum\limits_{A\subset M}\alpha$.

解答（PDF 中已展开）

解答：

任意一个不含元素 1 的子集 A，与集合 $A\cup\{1\}$ 一一对应，且 A 与 $A\cup\{1\}$ 的元素和差 1，故一奇一偶.

因此 $\alpha_A+\alpha_{A\cup\{1\}}=0$，于是 $\sum\limits_{A\subset M}\alpha=\sum\limits_{1\notin A\subset M}(\alpha_A+\alpha_{A\cup\{1\}})=0$.

1. 给定直角 $\triangle ABC$，其中 $\angle ACB=90^\circ$，$BC=a$，$CA=b$. 点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，使得 $\triangle DEF$ 是等边三角形，求 $\triangle DEF$ 的面积的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

考虑更一般的情况，对 $\triangle ABC$，设其三边长依次为 a、b、c，面积为 S. 则 $\triangle ABC$ 的内接正三角形 $\triangle PQR$ 的最小面积为

$$\frac{S^2}{\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2+b^2+c^2)+2S}$$

设 $\angle BRP=\theta$，则 $\angle PQC=\angle A+60^\circ-\theta$. 再设 $\triangle PQR$ 的边长为 x，在 $\triangle BRP$ 和 $\triangle PQC$ 中，由正弦定理得：$BP=\dfrac{\sin\theta}{\sin B}x$，$PC=\dfrac{\sin(\angle A+60^\circ-\theta)}{\sin C}x$.
又因为 $BP+PC=BC=a$，故

$$\begin{aligned}
x=&\frac{a}{\dfrac{\sin\theta}{\sin B}+\dfrac{\sin(\angle A+60^\circ-\theta)}{\sin C}}\\
=&\frac{a}{\sin\theta\left(\dfrac{1}{\sin B}-\dfrac{\cos(\angle A+60^\circ)}{\sin C}\right)+\cos\theta\cdot\dfrac{\sin(\angle A+60^\circ)}{\sin C}}\\
\geq&\frac{a}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sin B}-\dfrac{\cos(\angle A+60^\circ)}{\sin C}\right)^2+\left(\dfrac{\sin(\angle A+60^\circ)}{\sin C}\right)^2}}\\
=&\frac{a\sin B\sin C}{\sqrt{\sin^2 B+\sin^2 C+\sin B\sin C(\sqrt{3}\sin A-\cos A)}}
\end{aligned}$$

将 $\sin A=\dfrac{2S}{bc}$，$\sin B=\dfrac{2S}{ca}$，$\sin C=\dfrac{2S}{ab}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 代入上式，得：

$$x\geq\sqrt{\frac{8S^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}}$$

当 $\tan\theta=\dfrac{\sin C-\sin B\cos(\angle A+60^\circ)}{\sin B\sin(\angle A+60^\circ)}$ 时，等号成立.
于是正 $\triangle PQR$ 的面积的最小值为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{S^2}{\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2+b^2+c^2)+2S}$$

回到原题，将 $c^2=a^2+b^2$，$S=\dfrac{1}{2}ab$ 代入得，本题答案为

$$\frac{\sqrt{3}a^2b^2}{4(a^2+\sqrt{3}ab+b^2)}$$

1. 设 t 为大于 3 的正整数. 求 t 的最小值，使得存在两个正整数 m,n，满足：m,n 都恰有 t 个正约数，且若将 m 的正约数从小到大排列为 $c_1,c_2,\cdots,c_t$（其中 $c_1=1$，$c_t=m$），将 n 的正约数从小到大排列为 $d_1,d_2,\cdots,d_t$（其中 $d_1=1$，$d_t=n$），则存在一个整数 r（$2\leq r\leq t-2$），使得

$$(-1)^i(c_i-d_i)\begin{cases}>0, i=2,3,\cdots,r,\\ <0, i=r+1,\cdots,t\end{cases}$$

解答（PDF 中已展开）

解答：

首先由 $2\le r\le t-2$ 可明确 $i=2$，$t-1$，t 时的情况：

$$\begin{cases}(-1)^2(c_2-d_2)>0\\ (-1)^{t-1}(c_{t-1}-d_{t-1})<0\\ (-1)^t(c_t-d_t)<0\end{cases}$$

注意到 $c_2c_{t-1}=c_t$，$d_2d_{t-1}=d_t$.

若 t 为偶数，则 $c_2>d_2$，$c_{t-1}>d_{t-1}$，$c_t<d_t$，矛盾. 于是 t 为奇数.

若 t 为素数，由约数个数公式知 $m=p^{t-1}$，$n=q^{t-1}$，p、q 均为素数. 此时 $c_i-d_i=p^{i-1}-q^{i-1}$ 的正负恒定，矛盾.

于是 t 为奇合数，故 $t\ge 9$.

下面给出构造：

取 $m=7^2\times 13^2$，$n=5^2\times 17^2$，则 c_i，d_i 分别为

$$1,7,13,49,91,169,637,1183,8281$$

$$1,5,17,25,85,289,425,1445,7225$$

此时 $c_2>d_2$，$c_3<d_3$，$c_4>d_4$，$r=4$，$c_5>d_5$，$c_6<d_6$，$c_7>d_7$，$c_8<d_8$，$c_9>d_9$.

注：

本题的构造是难点，我总共花了接近半小时才完全做出来。

m 和 n 都为 p^2q^2 形式的数，主要是选择恰当大小的素数，使得 c_i 和 d_i 的大小关系除了第 r 个外，始终在发生改变.

思路还是用 $i=2$、8、9 这三个位置的大小关系来估计素数之比的范围. 读者可以自己尝试一下.