2024 年伊朗数学奥林匹克第三轮期中测试

2024-09-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a4494ef2c318068f

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年伊朗数学奥林匹克第三轮期中测试

程国根 译

第一天

1. 给定 $T \in \mathbb{N}$. 求所有函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$，使得对 $\forall m \in \mathbb{Z}$，有 $f(m+T) = f(m)$；对 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$，有

$$f(a)\overline{f(a+b)f(a+c)}f(a+b+c) = 1.$$

2. 两个聪明人在有 1403^2 个单元格的 1403×1403 方格表上进行游戏。第一个人每轮选择一个之前没有选择过的单元格，并从该单元格的顶部到底部画一条垂直线段。第二个人每轮选择一个之前没有选择的单元格，并从该单元格的左边到右边画一条水平线段。1403^2 次之后，游戏结束。第一个人得到的分数等于最长垂直线段的分数，同样，第二个人得到的分数等于最长水平线段的分数。游戏结束时，获得分数更多的人将获胜。问：谁能够赢得游戏?

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的内角平分线和边 BC 交于点 E，和 $\odot(ABC)$ 上的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 交于点 M. 点 D 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，且满足 $ED = EM$. 点 P 在线段 AD 上，且满足 $\angle ABP = \angle ACP \neq 0$. O 为 $\triangle ABC$ 的外心，求证：$OP \perp AM$.

2024 年伊朗数学奥林匹克第三轮
期中测试

程国根　译

第二天

4. 对给定的正整数 n，求所有集合 $\{r_0, r_1, \cdots, r_n\} \subset \mathbb{N}$，使得

$$n^n + n^{n-1} + \cdots + 1 | n^{r_n} + \cdots + n^{r_0}.$$

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 X, Y 分别为点 A 在 CB, CD 上的射影．垂直于 XY 且平分线段 AX 的直线 ℓ 与 AB, BC 分别交于点 K, L，垂直于 XY 且平分线段 AY 的直线与 AD, DC 分别交于点 P, Q．求证：$\triangle BKL$ 的外接圆与 $\triangle DPQ$ 的外接圆相切．

6. 正整数列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 定义如下：$x_1 = 1$，对任意 $n \geq 1$，$x_{n+1}^2 + P(n) = x_n x_{n+2}$，其中 $P(x)$ 是系数均为非负整数的多项式．求证：$P(x)$ 为常数多项式．