30 道复数法训练题——参考答案（一）

2024-04-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a4bc1070fc91be05

本系列计划分五期完成，每期分享 6 题的参考答案，不定时更新。

今天带来第 1 题到第 6 题的参考答案：（基本结论部分由读者自行证明）

手打不易，如果有错误或者有更好的计算方法，可以在留言区分享。

题目部分见：30 道复数法训练题

复数法训练题

一、基本结论

以下均小写字母 x 来表示点 X 所对应复数.

1. Z,A,B 三点共线当且仅当 $\dfrac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}$.

2. AB 垂直于 CD 当且仅当 $\dfrac{d-c}{b-a}$ 为纯虚数.

3. AB 平行于 CD 当且仅当 $\dfrac{a-b}{c-d}\in\mathbb{R}$.

4. A 和 B 关于直线 CD 对称当且仅当 $a=\dfrac{(c-d)\bar{b}+\bar{c}d-c\bar{d}}{\bar{c}-\bar{d}}$.

5. AB 在单位圆上，则 Z 在 AB 上的射影为 $\dfrac{a+b+z-ab\bar{z}}{2}$.

6. $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 顺相似当且仅当 $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{x-y}{y-z}$；$\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 逆相似当且仅当 $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{y}-\bar{z}}$.

7. AB 和 CD 交于点 P，则 $p=\dfrac{(\bar{a}b-a\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}d-c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}-\bar{d})}$；特别地，如果 A,B,C,D 在单位圆上，则 $p=\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

8. Y 为 AB 和 CD 的位似旋转中心，则 $y=\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$.

9. A,B 在单位圆上，过它们的切线的交点为 P，则 $p=\dfrac{2ab}{a+b}$.

10. $\triangle ABC$ 的内心为 I，A,B,C 所对的旁心分别为 I_A,I_B,I_C，设 $a=u^2$，$b=v^2$，$c=w^2$，则 $i=-(uv+vw+wu)$，$i_A=uv-vw+wu$，$i_B=uv+vw-wu$，$i_C=-uv+vw+wu$.

11. $\triangle ABC$ 的外心为 O，则 $o=\begin{vmatrix} a & a\bar{a} & 1 \\ b & b\bar{b} & 1 \\ c & c\bar{c} & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$.

12. A,B,C 在单位圆上，$\angle BAC=60^\circ$，则 $b^2+bc+c^2=0$.

13. A,B,C 在单位圆上，$\triangle ABC$ 的垂心为 H，九点圆圆心为 N，重心为 G，则 $h=a+b+c$，$n=\dfrac{a+b+c}{2}$，$g=\dfrac{a+b+c}{3}$.

14. A,B 在单位圆上，点 P 在弦 AB 上，则 $p+ab\bar{p}=a+b$.

15. A,B,C,D 四点共圆当且仅当 $\dfrac{b-a}{c-a}\div\dfrac{b-d}{c-d}=\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}\div\dfrac{\bar{b}-\bar{d}}{\bar{c}-\bar{d}}$.

16. 考虑有向角模 180°，则 $\angle ABC=\angle XYZ$ 当且仅当 $\dfrac{a-b}{c-b}\div\dfrac{x-y}{z-y}\in\mathbb{R}$.

17. $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$.

二、典型例题

1. $\triangle ABC$ 的外接圆在点 B,C 处的切线交于点 N，M 为 BC 中点.

求证：$\angle BAN=\angle CAM$.

证明 设 A,B,C 在单位圆上，则 $n=\dfrac{2bc}{b+c}$，$m=\dfrac{b+c}{2}$. 只需证明：

$$r=\frac{\frac{c-a}{m-a}}{\frac{n-a}{b-a}}=\frac{(c-a)(b-a)}{\left(\frac{b+c}{2}-a\right)\left(\frac{2bc}{b+c}-a\right)}=\frac{2(c-a)(b-a)(b+c)}{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}\in\mathbb{R}$$

$$\text{则}\bar{r}=\frac{2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{2}{bc}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{ac}\right)}=\frac{2(c-a)(b-a)(b+c)}{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}=r.$$

于是 $r\in\mathbb{R}$，证毕.

2. 求证：圆内接四边形 $ABCD$ 的密克点、对角线的交点、外接圆的圆心，这三点共线.

证明 设 $ABCD$ 内接于单位圆 O. 设 $ABCD$ 的密克点为 M，则由 $\triangle MBC$ 顺相似于 $\triangle MAD$ 知：$\dfrac{m-b}{m-c}=\dfrac{m-a}{m-d}$，即

$m=\dfrac{bd-ac}{b+d-a-c}$，$\bar{m}=\dfrac{\frac{1}{bd}-\frac{1}{ac}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}=\dfrac{ac-bd}{ac(b+d)-bd(a+c)}$.

设 $ABCD$ 的对角线交点为 N，则 $n=\dfrac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}$，

于是 $\bar{m}n=m\bar{n}=1$.

因此 $\dfrac{0-m}{0-n}=\dfrac{0-\bar{m}}{0-\bar{n}}$，即 O,M,N 三点共线，证毕.

3. (2009 年 IMO 预选题 G4) 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，

$AC \cap BD = E$，$AD \cap BC = F$．G, H 分别是 AB, CD 的中点．求证：

EF 是 $\triangle EGH$ 的外接圆的切线．

证明 设 M 为 EF 的中点，则由牛顿线定理知：G, H, M 三点共线．

故只需证明：$ME^2 = MG \cdot MH$．

设 $(ABCD)$ 的半径为 R，简记 $\overrightarrow{OX}$ 为 x．即证：

$$\left(\frac{e-f}{2}\right)^2 = \left(\frac{e+f}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{e+f}{2} - \frac{c+d}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 4e \cdot f - (e+f) \cdot (a+b+c+d) + (a+b) \cdot (c+d) = 0.$$

记 $\rho(X)$ 为点 X 对 $\odot O$ 的圆幂，则有：

$$\rho(E) = (e-a) \cdot (e-c) = (e-b) \cdot (e-d) = e^2 - R^2$$

$$\rho(F) = (f-a) \cdot (f-b) = (f-b) \cdot (f-c) = f^2 - R^2$$

F 在 E 的极线上，故 $4e \cdot f = 4R^2$．

以上五式相加即证．

4. (2014 年 IMO 第 4 题) 点 P,Q 在锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，满足 $\angle PAB=\angle BCA$，且 $\angle CAQ=\angle ABC$．点 M,N 分别在直线 AP,AQ 上，使得 P 为 AM 的中点，且 Q 为 AN 的中点．求证：直线 BM 与 CN 的交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上．

证明 我们证明 $BM\cap(ABC)=CN\cap(ABC)$，注意到 M,N 地位对等，只需证明 $X=BM\cap(ABC)$ 的表达式是关于 b,c 对称的．导角知 $\triangle PBA$ 和 $\triangle ABC$ 逆相似，于是

$$\frac{p-b}{p-c}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}}\Rightarrow p=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}(a-b)+b=\frac{c(a-b)^2}{a(c-b)}+b$$

由 P 为 AM 中点：$m=2p-a=2\left(\dfrac{c(a-b)^2}{a(c-b)}+b\right)-a$．

若 $X\in(ABC)$，则 $\bar{x}=\dfrac{1}{x}$，于是

$$\frac{m-b}{\bar{m}-\bar{b}}=\frac{x-b}{\bar{x}-\bar{b}}=-bx$$

$$\Rightarrow x=-\frac{m-b}{b(\bar{m}-\bar{b})}=-\frac{2\left(\frac{c(a-b)^2}{a(c-b)}+b\right)-a-b}{b\left[2\left(\frac{\frac{1}{c}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2}{\frac{1}{a}(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})}+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}=-\frac{ab+ac-2bc}{b+c-2a}$$

上式关于 b,c 对称，于是命题得证．

5

5. $\triangle ABC$ 的内心为 I，内切圆与三边的切点分别为 R,S,T．M,N 分别为 AR 和 BC 的中点．求证：M,I,N 三点共线．

证明 设内切圆为单位圆，内心为原点．于是有

$$a=\frac{2st}{s+t},b=\frac{2rt}{r+t},c=\frac{2rs}{r+s}.$$

$$n=\frac{b+c}{2}=\frac{rt}{r+t}+\frac{rs}{r+s}=\frac{r(rs+rt+2st)}{(r+s)(r+t)}$$

$$\bar{n}=\frac{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{rs}+\frac{1}{rt}+\frac{2}{st}\right)}{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{t}\right)}=\frac{s+t+2r}{(r+s)(r+t)}$$

$$m=\frac{a+r}{2}=\frac{st}{s+t}+\frac{r}{2}=\frac{rs+rt+2st}{2(s+t)},\bar{m}=\frac{\frac{1}{rs}+\frac{1}{rt}+\frac{2}{st}}{2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)}=\frac{s+t+2r}{2r(s+t)}.$$

于是

$$\frac{m}{\bar{m}}=\frac{r(rs+rt+2st)}{s+t+2r}=\frac{n}{\bar{n}}$$

因此 M,I,N 三点共线，证毕．

6. $\triangle ABC$ 的重心为 G，点 A 在 BC 边上的射影为 H，过点 A 作 BC 的平行线，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于另一点 D．求证：H,G,D 三点共线．

证明 熟知 $g=\dfrac{a+b+c}{3}$，$h=\dfrac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}$．设 (ABC) 为单位圆，则由 $AD\parallel BC$ 知：

$$\frac{a-d}{\bar{a}-\bar{d}}=\frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}\iff\frac{a-d}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}=\frac{b-c}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}\iff d=\frac{bc}{a}$$

H,G,D 三点共线 $\iff\dfrac{d-g}{\bar{d}-\bar{g}}=\dfrac{d-h}{\bar{d}-\bar{h}}$.

$$d-g=\frac{bc}{a}-\frac{a+b+c}{3}=\frac{3bc-a^2-ab-ac}{3a}.$$

$$\bar{d}-\bar{g}=\frac{a}{bc}-\frac{1}{3a}-\frac{1}{3b}-\frac{1}{3c}=\frac{3a^2-bc-ab-ac}{3abc}.$$

$$d-h=\frac{bc}{a}-\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}=\frac{3bc-a^2-ab-ac}{2a}.$$

$$\bar{d}-\bar{h}=\frac{a}{bc}+\frac{a}{2bc}-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2c}=\frac{3a^2-bc-ca-ab}{2abc}$$

于是 $\dfrac{d-h}{d-h}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\bar{d}-\bar{g}}{\bar{d}-\bar{h}}$，证毕．

复数法训练题

一、基本结论

以下均小写字母 x来表示点 X所对应复数.

1. Z,A,B三点共线当且仅当 $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}$.

2. AB垂直于 CD当且仅当 $\frac{d-c}{b-a}$为纯虚数.

3. AB平行于 CD当且仅当 $\frac{a-b}{c-d}\in\mathbb{R}$.

4. A和 B关于直线 CD对称当且仅当 $a=\frac{(c-d)\bar{b}+\bar{c}d-c\bar{d}}{\bar{c}-\bar{d}}$.

5. AB在单位圆上，则 Z在 AB上的射影为 $\frac{a+b+z-ab\bar{z}}{2}$.

6. $\triangle ABC$和 $\triangle XYZ$顺相似当且仅当 $\frac{a-b}{b-c}=\frac{x-y}{y-z}$；$\triangle ABC$和 $\triangle XYZ$逆相似当且仅当 $\frac{a-b}{b-c}=\frac{\bar{x}-\bar

{y}}{\bar{y}-\bar{z}}$.

7. AB和 CD交于点 P，则 $p=\frac{(\bar{a}b-a\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}d-c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}-\bar{d})}$；特别地，如果 A,B,C,D在单位圆上，则 $p=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

8. Y为 AB和 CD的位似旋转中心，则 $y=\frac{ad-bc}{a+d-b-c}$.

9. A,B在单位圆上，过它们的切线的交点为 P，则 $p=\frac{2ab}{a+b}$.

10. $\triangle ABC$的内心为 I，A,B,C所对的旁心分别为 I_{A},I_{B},I_{C}，设 $a=u^{2}$，$b=v^{2}$，$c=w^{2}$，则 $i=-(uv+vw+wu)$，$i_{A}=uv-vw+wu$，$i_{B}=uv+vw-wu$，$i_{C}=-uv+vw+wu$.

11. $\triangle ABC$的外心为 O，则 $o=\left|\begin{array}{lll}a & a \bar{a} & 1 \\ b & b\bar{b} & 1 \\ c & c\bar{c} & 1\end{array}\right|\div\left|\begin{array}{lll}a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c& \bar{c} & 1\end{array}\right|$.

12. A,B,C在单位圆上，$\angle BAC=60^{\circ}$，则 $b^{2}+bc+c^{2}=0$.

13. A,B,C在单位圆上，$\triangle ABC$的垂心为 H，九点圆圆心为 N，重心为 G，则 $h=a+b+c$，$n=\frac{a+b+c}{2}$，$g=\frac{a+b+c}{3}$.

14. A,B在单位圆上，点 P在弦 AB上，则 $p+ab\bar{p}=a+b$.

15. A,B,C,D四点共圆当且仅当 $\frac{b-a}{c-a}\div\frac{b-d}{c-d}=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}\div\frac{\bar{b}-\bar{d}}{\bar{c}-\bar{d}}$.

16. 考虑有向角模 180°，则 $\angle ABC=\angle XYZ$当且仅当 $\frac{a-b}{c-b}\div\frac{x-y}{z-y}\in\mathbb{R}$.

17. $\triangle ABC$的面积 $S=\frac{\mathrm{i}}{4}\left|\begin{array}{lll}a&\bar{a}&1\\b&\bar{b}&1\\c&\bar{c}&1\end{array}\right|$.

二、典型例题

1. $\triangle ABC$的外接圆在点 B,C处的切线交于点 N，M为 BC中点. 求证：$\angle BAN=\angle CAM$.

设 A,B,C在单位圆上，则 $n=\frac{2bc}{b+c}$，$m=\frac{b+c}{2}$. 只需证明：$$r=\frac{\frac{c-a}{m-a}}{\frac{n-a}{b-a}}=\frac{(c-a)(b-a)}{\left(\frac{b+c}{2}-a\right)\left(\frac{2 b c}{b+c}-a\right)}=\frac{2(c-a)(b-a)(b+c)}{(b+c-2 a)(2 b c-a b-a c)} \in \mathbb{R}$$$$\text{则}\bar{r}=\frac{2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{2}{b c}-\frac{1}{a b}-\frac{1}{a c}\right)}=\frac{2(c-a)(b-a)(b+c)}{(b+c-2 a)(2 b c-a b-a c)}=r.$$ 于是 $r\in\mathbb{R}$，证毕.

2. 求证：圆内接四边形 $ABCD$的密克点、对角线的交点、外接圆的圆心，这三点共线.

设 $ABCD$内接于单位圆 O. 设 $ABCD$的密克点为 M，则由 $\triangle MBC$顺相似于 $\triangle MAD$知：$\frac{m-b}{m-c}=\frac{m-a}{m-d}$，即 $m=\frac{bd-ac}{b+d-a-

c}$，$\bar{m}=\frac{\frac{1}{bd}-\frac{1}{ac}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}=\frac{ac-bd}{ac(b+d)-bd(a+c)}$. 设 $ABCD$的对角线交点为 N，则 $n=\frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}$，于是 $\bar{m}n=m\bar{n}=1$. 因此 $\frac{0-m}{0-n}=\frac{0-\bar{m}}{0-\bar{n}}$，即 O,M,N三点共线，证毕.

3. **（2009 年 IMO 预选题 G4）**在圆内接四边形 $ABCD$中，$AC\cap BD=E$，$AD\cap BC=F$. G,H分别是 AB,CD的中点. 求证：EF是 $\triangle EGH$的外接圆的切线.

设 M为 EF的中点，则由牛顿线定理知：G,H,M三点共线. 故只需证明：$ME^{2}=MG\cdot MH$. 设 $(ABCD)$的半径为 R，简记 $\vv{OX}$为 x. 即证：$$\begin{aligned}&\left(\frac{e-f}{2}\right)^{2}=\left(\frac{e+f}{2}-\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{e+f}{2}-\frac{c+d}{2}\right)\\\iff&4e\cdot f-(e+f)\cdot (a+b+c+d)+(a+b)\cdot (c+d)=0.\end{aligned}$$记 $\rho(X)$为点 X对 $\odot O$的圆幂，则有：$$\begin{aligned}&\rho(E)=(e-a)\cdot (e-c)=(e-b)\cdot (e-d)=e^{2}- R^{2}\\&\rho(F)=(f-a)\cdot (f-b)=(f-b)\cdot (f-c)=f^{2}-R^{2}\end{aligned}$$$F$在 E的极线上，故 $4e\cdot f=4R^{2}$. 以上五式相加即证.

4. **（2014 年 IMO 第 4 题）**点 P,Q在锐角 $\triangle ABC$的边 BC上，满足 $\angle PAB=\angle BCA$，且 $\angle CAQ=\angle ABC$. 点 M,N分别在直线 AP,AQ上，使得 P为 AM的中点，且 Q为 AN的中点. 求证：直线 BM与 CN的交点在 $\triangle ABC$的外接圆上.

我们证明 $BM\cap(ABC)=CN\cap(ABC)$，注意到 M,N地位对等，只需证明 $X=BM\cap(ABC)$的表达式是关于 b,c对称的. 导角知 $\triangle PBA$和 $\triangle ABC$逆相似，于是 $$\frac{p-b}{p-c}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}}\Rightarrow p=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}(a-b)+b=\frac{c(a-b)^{2}}{a(c-b)}+b$$由 P为 AM中点：$m=2p-a=2\left(\frac{c(a-b)^{2}}{a(c-b)}+b\right)-a$. 若 $X\in(ABC)$，则 $\bar{x}=\frac{1}{x}$，于是 $$\begin{aligned}&\frac{m-b}{\bar{m}-\bar{b}}=\frac{x-b}{\bar{x}-\bar{b}}=-bx\\\Rightarrow&x=-\frac{m-b}{b(\bar{m}-\bar{b})}=-\frac{2\left(\frac{c(a-b)^{2}}{a(c-b)}+b\right)-a-b}{b\left[2\left(\frac{\frac{1}{c}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^{2}}{\frac{1}{a}(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})}+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}=-\frac{ab+ac-2bc}{b+c-2a}\end{aligned}$$上式关于 b,c对称，于是命题得证.

5. $\triangle ABC$的内心为 I，内切圆与三边的切点分别为 R,S,T. M,N分别为 AR和 BC的中点. 求证：M,I,N三点共线.

设内切圆为单位圆，内心为原点. 于是有 $$a=\frac{2st}{s+t},b=\frac{2rt}{r+t},c=\frac{2rs}{r+s}.$$$$n=\frac{b+c}{2}=\frac{rt}{r+t}+\frac{rs}{r+s}=\frac{r(rs+rt+2st)}{(r+s)(r+t)}$$$$\bar{n}=\frac{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{rs}+\frac{1}{rt}+\frac{2}{st}\right)}{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{t}\right)}=\frac{s+t+2r}{(r+s)(r+t)}$$$$m=\frac{a+r}{2}=\frac{st}{s+t}+\frac{r}{2}=\frac{rs+rt+2st}{2(s+t)},\bar{m}=\frac{\frac{1}{rs}+\frac{1}{rt}+\frac{2}{st}}{2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)}=\frac{s+t+2r}{2r(s+t)}.$$于是 $$\frac{m}{\bar{m}}=\frac{r(rs+rt+2st)}{s+t+2r}=\frac{n}{\bar{n}}$$因此 M,I,N三点共线，证毕.

6. $\triangle ABC$的重心为 G，点 A在 BC边上的射影为 H，过点 A作 BC的平行线，交 $\triangle ABC$的外接圆于另一点 D. 求证：H,G,D三点共线.

熟知 $g=\frac{a+b+c}{3}$, $h=\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}$. 设 (ABC)为单位圆，则由 $AD\parallel BC$知：$$\frac{a-d}{\bar{a}-\bar{d}}=\frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}\iff \frac{a-d}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}=\frac{b-c}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}\iff d=\frac{bc}{a}$$ $$H,G,D$三点共线 $\iff\frac{d-g}{\bar{d}-\bar{g}}=\frac{d-h}{\bar{d}-\bar{h}}$. $$d-g=\frac{bc}{a}-\frac{a+b+c}{3}=\frac{3bc-a^{2}-ab-ac}{3a}.$$$$\bar{d}-\bar{g}=\frac{a}{bc}-\frac{1}{3a}-\frac{1}{3b}-\frac{1}{3c}=\frac{3a^{2}-bc-ab-ac}{3abc}.$$$$d-h=\frac{bc}{a}-\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}=\frac{3bc-a^{2}-ab-ac}{2a}.$$$$\bar{d}-\bar{h}=\frac{a}{bc}+\frac{a}{2bc}-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2c}=\frac{3a^{2}-bc-ca-ab}{2abc}$$于是 $\frac{d-h}{d-h}=\frac{2}{3}=\frac{\bar{d}-\bar{g}}{\bar{d}-\bar{h}}$，证毕.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{复数法训练题}\subsection*{一、基本结论} 以下均小写字母 $x$ 来表示点 $X$ 所对应复数.
\ex $Z,A,B$三点共线当且仅当$\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}$. \ex $AB$垂直于$CD$当且仅当$\frac{d-c}{b-a}$为纯虚数. \ex
↪ $AB$平行于$CD$当且仅当$\frac{a-b}{c-d}\in\mathbb{R}$. \ex
↪ $A$和$B$关于直线$CD$对称当且仅当$a=\frac{(c-d)\bar{b}+\bar{c}d-c\bar{d}}{\bar{c}-\bar{d}}$. \ex $AB$在单位圆上，
↪ 则$Z$在$AB$上的射影为$\frac{a+b+z-ab\bar{z}}{2}$. \ex $\triangle ABC$和$\triangle
↪ XYZ$顺相似当且仅当$\frac{a-b}{b-c}=\frac{x-y}{y-z}$；$\triangle ABC$和$\triangle
↪ XYZ$逆相似当且仅当$\frac{a-b}{b-c}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{y}-\bar{z}}$. \ex $AB$和$CD$交于点$P$，
↪ 则$p=\frac{(\bar{a}b-a\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}d-c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(a-b)(\bar{c}-\bar{d})}$；特别地，
↪ 如果$A,B,C,D$在单位圆上，则$p=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$. \ex $Y$为$AB$和$CD$的位似旋转中心，
↪ 则$y=\frac{ad-bc}{a+d-b-c}$. \ex $A,B$在单位圆上，过它们的切线的交点为$P$，则$p=\frac{2ab}{a+b}$. \ex $\triangle
↪ ABC$的内心为$I$，$A,B,C$所对的旁心分别为$I_{A},I_{B},I_{C}$，设$a=u^{2}$，$b=v^{2}$，$c=w^{2}$，
↪ 则$i=-(uv+vw+wu)$，$i_{A}=uv-vw+wu$，$i_{B}=uv+vw-wu$，$i_{C}=-uv+vw+wu$. \ex $\triangle ABC$的外心为$O$，
↪ 则$o=\left|\begin{array}{lll}a & a \bar{a} & 1 \\ b & b\bar{b} & 1 \\ c & c\bar{c} & 1\end{array}\right|\div\left|\begin{array}{lll}a &
↪ \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c& \bar{c} & 1\end{array}\right|$. \ex $A,B,C$在单位圆上，$\angle BAC=60^{\circ}$，
↪ 则$b^{2}+bc+c^{2}=0$. \ex $A,B,C$在单位圆上，$\triangle ABC$的垂心为$H$，九点圆圆心为$N$，重心为$G$，
↪ 则$h=a+b+c$，$n=\frac{a+b+c}{2}$，$g=\frac{a+b+c}{3}$. \ex $A,B$在单位圆上，点$P$在弦$AB$上，
↪ 则$p+ab\bar{p}=a+b$. \ex $A,B,C,D$四点共圆当且仅当$\frac{b-a}{c-a}\div\frac{b-d}{c-d}=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{」
↪ a}}\div\frac{\bar{b}-\bar{d}}{\bar{c}-\bar{d}}$. \ex 考虑有向角模$180^{\circ}$，则$\angle ABC=\angle
↪ XYZ$当且仅当$\frac{a-b}{c-b}\div\frac{x-y}{z-y}\in\mathbb{R}$. \ex $\triangle
↪ ABC$的面积$S=\frac{\mathrm{i}}{4}\left|\begin{array}{lll}a&\bar{a}&1\\b&\bar{b}&1\\c&\bar{c}&1\end{array}\right|$.
↪ \newpage\subsection*{二、典型例题}
\setcounter{ex}{0}
\ex $\triangle ABC$的外接圆在点$B,C$处的切线交于点$N$，$M$为$BC$中点. 求证：$\angle BAN=\angle CAM$.
↪ \begin{proof}设$A,B,C$在单位圆上，则$n=\frac{2bc}{b+c}$，$m=\frac{b+c}{2}$. 只需证明：
↪ $$r=\frac{\frac{c-a}{m-a}}{\frac{n-a}{b-a}}=\frac{(c-a)(b-a)}{\left(\frac{b+c}{2}-a\right)\left(\frac{2 b
↪ c}{b+c}-a\right)}=\frac{2(c-a)(b-a)(b+c)}{(b+c-2 a)(2 b c-a b-a c)} \in
↪ \mathbb{R}$$$$\text{则}\bar{r}=\frac{2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{」
↪ c}\right)}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{2}{b c}-\frac{1}{a b}-\frac{1}{a
↪ c}\right)}=\frac{2(c-a)(b-a)(b+c)}{(b+c-2 a)(2 b c-a b-a c)}=r.$$
于是$r\in\mathbb{R}$，证毕. \end{proof}\ex 求证：圆内接四边形$ABCD$的密克点、对角线的交点、外接圆的圆心，这三点共线.
↪ \begin{proof}设$ABCD$内接于单位圆$O$. 设$ABCD$的密克点为$M$，则由$\triangle MBC$顺相似于$\triangle MAD$知：
↪ $\frac{m-b}{m-c}=\frac{m-a}{m-d}$，即$m=\frac{bd-ac}{b+d-a-c}$，
↪ $\bar{m}=\frac{\frac{1}{bd}-\frac{1}{ac}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}=\frac{ac-bd}{ac(b+d)-bd(a+c)}$.
设 $ABCD$ 的对角线交点为 $N$，则 $n=\frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}$，
于是 $\bar{m}n=m\bar{n}=1$.
```

因此$\frac{0-m}{0-n}=\frac{0-\bar{m}}{0-\bar{n}}$，即$O,M,N$三点共线，证毕．\end{proof}\newpage\ex \textbf{
↪ （2009年IMO预选题G4）}在圆内接四边形$ABCD$中，$AC\cap BD=E$，$AD\cap BC=F$．G,H分别是AB,CD的中点．
↪ 求证：EF是$\triangle EGH$的外接圆的切线．\begin{proof}设M为EF的中点，则由牛顿线定理知：G,H,M三点共线．
↪ 故只需证明：$ME^{2}=MG\cdot MH$.
设$(ABCD)$的半径为R，简记$\vv{OX}$为x．即证：$$\begin{aligned}&\left(\frac{e-f}{2}\right)^{2}=\left(\frac{e+f}{2}-\frac{a+
↪ b}{2}\right)\cdot\left(\frac{e+f}{2}-\frac{c+d}{2}\right)\\\iff&4e\cdot f-(e+f)\cdot (a+b+c+d)+(a+b)\cdot
↪ (c+d)=0.\end{aligned}$$记$\rho(X)$为点X对$\odot O$的圆幂，则有：$$\begin{aligned}&\rho(E)=(e-a)\cdot
↪ (e-c)=(e-b)\cdot (e-d)=e^{2}- R^{2}\\&\rho(F)=(f-a)\cdot (f-b)=(f-b)\cdot (f-c)=f^{2}-R^{2}\end{aligned}$$$F$在$E$的极线上，
↪ 故$4e\cdot f=4R^{2}$.
以上五式相加即证．\end{proof}\newpage
\ex \textbf{（2014年IMO第4题）}点P,Q在锐角$\triangle ABC$的边BC上，满足$\angle PAB=\angle BCA$，且$\angle
↪ CAQ=\angle ABC$．点$M,N$分别在直线$AP,AQ$上，使得$P$为$AM$的中点，且$Q$为$AN$的中点．求证：
↪ 直线BM与CN的交点在$\triangle ABC$的外接圆上．\begin{proof}我们证明$BM\cap(ABC)=CN\cap(ABC)$，
↪ 注意到M,N地位对等，只需证明$X=BM\cap(ABC)$的表达式是关于b,c对称的．导角知$\triangle PBA$和$\triangle
↪ ABC$逆相似，于是$$\frac{p-b}{p-c}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}}\Rightarrow
↪ p=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}(a-b)+b=\frac{c(a-b)^{2}}{a(c-b)}+b$$由P为AM中点：
↪ $m=2p-a=2\left(\frac{c(a-b)^{2}}{a(c-b)}+b\right)-a$.
若$X\in(ABC)$，则$\bar{x}=\frac{1}{x}$，于是$$\begin{aligned}&\frac{m-b}{\bar{m}-\bar{b}}=\frac{x-b}{\bar{x}-\bar{b}}=-bx\\\Righ
↪ tarrow&x=-\frac{m-b}{b(\bar{m}-\bar{b})}=-\frac{2\left(\frac{c(a-b)^{2}}{a(c-b)}+b\right)-a-b}{b\left[2\left(\frac{\frac{1}{c}(\frac{1
↪ }{a}-\frac{1}{b})^{2}}{\frac{1}{a}(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})}+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}=-\frac{ab+ac-2bc}{b+c-2
↪ a}\end{aligned}$$上式关于b,c对称，于是命题得证．\end{proof}\newpage\ex $\triangle ABC$的内心为I，
↪ 内切圆与三边的切点分别为R,S,T．M,N分别为AR和BC的中点．求证：M,I,N三点共线．
↪ \begin{proof}设内切圆为单位圆，内心为原点．于是有$$a=\frac{2st}{s+t},b=\frac{2rt}{r+t},c=\frac{2rs}{r+s}.$$$$n=\frac{b+c}{
↪ 2}=\frac{rt}{r+t}+\frac{rs}{r+s}=\frac{r(rs+rt+2st)}{(r+s)(r+t)}$$$$\bar{n}=\frac{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{rs}+\frac{1}{rt}+\frac{2}{st}
↪ \right)}{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{t}\right)}=\frac{s+t+2r}{(r+s)(r+t)}$$$$m=\frac{a+r}{2}=\frac{st}{
↪ s+t}+\frac{r}{2}=\frac{rs+rt+2st}{2(s+t)},\bar{m}=\frac{\frac{1}{rs}+\frac{1}{rt}+\frac{2}{st}}{2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)}=\f
↪ rac{s+t+2r}{2r(s+t)}.$$于是$$\frac{m}{\bar{m}}=\frac{r(rs+rt+2st)}{s+t+2r}=\frac{n}{\bar{n}}$$因此M,I,N三点共线，证毕．
↪ \end{proof}\newpage\ex $\triangle ABC$的重心为G，点A在BC边上的射影为H，过点A作BC的平行线，
↪ 交$\triangle ABC$的外接圆于另一点D．求证：H,G,D三点共线．\begin{proof}熟知$g=\frac{a+b+c}{3}$，
↪ $h=\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}$．设$(ABC)$为单位圆，则由$AD\parallel BC$知：
↪ $$\frac{a-d}{\bar{a}-\bar{d}}=\frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}\iff \frac{a-d}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}}=\frac{b-c}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}\iff
↪ d=\frac{bc}{a}$$$H,G,D$三点共线$\iff\frac{d-g}{\bar{d}-\bar{g}}=\frac{d-h}{\bar{d}-\bar{h}}$.
↪ $$d-g=\frac{bc}{a}-\frac{a+b+c}{3}=\frac{3bc-a^{2}-ab-ac}{3a}.$$$$\bar{d}-\bar{g}=\frac{a}{bc}-\frac{1}{3a}-\frac{1}{3b}-\frac{
↪ 1}{3c}=\frac{3a^{2}-bc-ab-ac}{3abc}.$$$$d-h=\frac{bc}{a}-\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}=\frac{3bc-a^{2}-ab-ac}{2a}.$$$$\bar{d
↪ }-\bar{h}=\frac{a}{bc}+\frac{a}{2bc}-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2c}=\frac{3a^{2}-bc-ca-ab}{2abc}$$于是$\frac{d-h}{d-h}=
↪ \frac{2}{3}=\frac{\bar{d}-\bar{g}}{\bar{d}-\bar{h}}$，证毕．\end{proof}