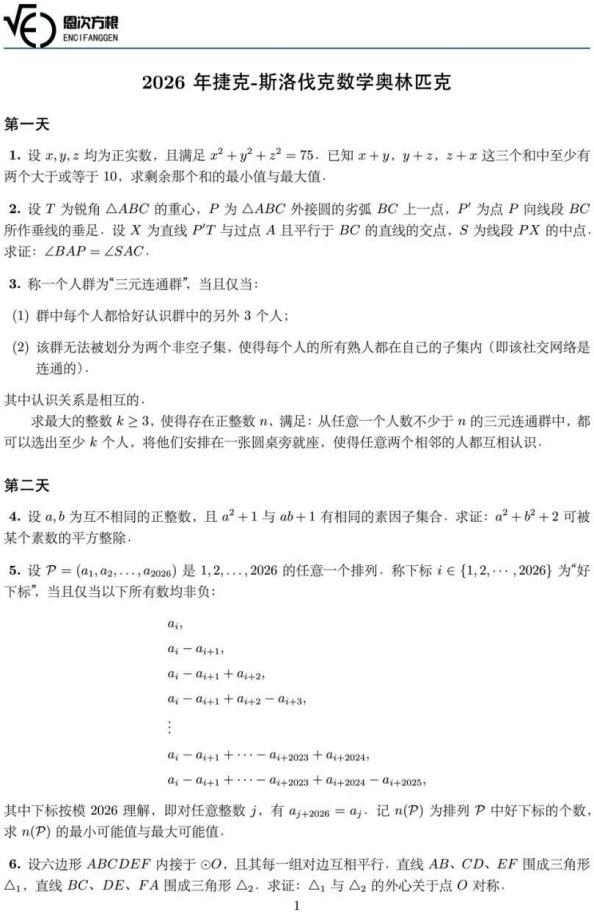
2026 年捷克-斯洛伐克数学奥林匹克

2026-04-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a4bddafe2c7a6ed3

本文为 2026 年捷克-斯洛伐克数学奥林匹克试题原文图，共 6 道题：第一天第 1–3 题、第二天第 4–6 题。正文以图片呈现，图片里的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方是本站对照原图逐题录入的文字版，只作阅读与检索之用。



恩次方根
ENCIFANGGEN

2026 年捷克-斯洛伐克数学奥林匹克

第一天

1. 设 x, y, z 均为正实数，且满足 $x^2+y^2+z^2=75$．已知 $x+y$，$y+z$，$z+x$ 这三个和中至少有两个大于或等于 10，求剩余那个和的最小值与最大值．

2. 设 T 为锐角 $\triangle ABC$ 的重心，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆的劣弧 BC 上一点，P' 为点 P 向线段 BC 所作垂线的垂足．设 X 为直线 $P'T$ 与过点 A 且平行于 BC 的直线的交点，S 为线段 PX 的中点．求证：$\angle BAP = \angle SAC$．

3. 称一个人群为"三元连通群"，当且仅当：

(1) 群中每个人都恰好认识群中的另外 3 个人；

(2) 该群无法被划分为两个非空子集，使得每个人的所有熟人都在自己的子集内（即该社交网络是连通的）．

其中认识关系是相互的．

求最大的整数 $k \geq 3$，使得存在正整数 n，满足：从任意一个人数不少于 n 的三元连通群中，都可以选出至少 k 个人，将他们安排在一张圆桌旁就座，使得任意两个相邻的人都互相认识．

第二天

4. 设 a, b 为互不相同的正整数，且 a^2+1 与 $ab+1$ 有相同的素因子集合．求证：a^2+b^2+2 可被某个素数的平方整除．

5. 设 $\mathcal{P}=(a_1, a_2, \ldots, a_{2026})$ 是 $1, 2, \ldots, 2026$ 的任意一个排列．称下标 $i \in \{1, 2, \cdots, 2026\}$ 为"好下标"，当且仅当以下所有数均非负：

$$
\begin{aligned}
&a_i,\\
&a_i - a_{i+1},\\
&a_i - a_{i+1} + a_{i+2},\\
&a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3},\\
&\vdots\\
&a_i - a_{i+1} + \cdots - a_{i+2023} + a_{i+2024},\\
&a_i - a_{i+1} + \cdots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025},
\end{aligned}
$$

其中下标按模 2026 理解，即对任意整数 j，有 $a_{j+2026}=a_j$．记 $n(\mathcal{P})$ 为排列 $\mathcal{P}$ 中好下标的个数，求 $n(\mathcal{P})$ 的最小可能值与最大可能值．

6. 设六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$，且其每一组对边互相平行．直线 AB、CD、EF 围成三角形 $\triangle_1$，直线 BC、DE、FA 围成三角形 $\triangle_2$．求证：$\triangle_1$ 与 $\triangle_2$ 的外心关于点 O 对称．

1

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第一天第 1 题　设 x,y,z 均为正实数，且满足 $x^2+y^2+z^2=75$。已知 $x+y$、$y+z$、$z+x$ 这三个和中至少有两个大于或等于 10，求剩余那个和的最小值与最大值。
2. 第一天第 2 题　设 T 为锐角 $\triangle ABC$ 的重心，P 为 $\triangle ABC$ 外接圆的劣弧 BC 上一点，P' 为点 P 向线段 BC 所作垂线的垂足。设 X 为直线 $

P'T$ 与过点 A 且平行于 BC 的直线的交点，S 为线段 PX 的中点。求证：$\angle BAP=\angle SAC$。

3. 第一天第 3 题　称一个人群为「三元连通群」，当且仅当：（1）群中每个人都恰好认识群中的另外 3 个人；（2）该群无法被划分为两个非空子集，使得每个人的所有熟人都在自己的子集内（即该社交网络是连通的）。其中认识关系是相互的。求最大的整数 $k\ge 3$，使得存在正整数 n，满足：从任意一个人数不少于 n 的三元连通群中，都可以选出至少 k 个人，将他们安排在一张圆桌旁就座，使得任意两个相邻的人都互相认识。
4. 第二天第 4 题　设 a,b 为互不相同的正整数，且 a^2+1 与 $ab+1$ 有相同的素因子集合。求证：a^2+b^2+2 可被某个素数的平方整除。
5. 第二天第 5 题　设 $\mathcal{P}=(a_1,a_2,\dots,a_{2026})$ 是 $1,2,\dots,2026$ 的任意一个排列。称下标 $i\in\{1,2,\cdots,2026\}$ 为「好下标」，当且仅当以下所有数均非负：a_i；a_i-a_{i+1}；$a_i-a_{i+1}+a_{i+2}$；$a_i-a_{i+1}+a_{i+2}-a_{i+3}$；$\cdots$；$a_i-a_{i+1}+\cdots-a_{i+2023}+a_{i+2024}$；$a_i-a_{i+1}+\cdots-a_{i+2023}+a_{i+2024}-a_{i+2025}$。其中下标按模 2026 理解，即对任意整数 j，有 $a_{j+2026}=a_j$。记 $n(\mathcal{P})$ 为排列 $\mathcal{P}$ 中好下标的个数，求 $n(\mathcal{P})$ 的最小可能值与最大可能值。
6. 第二天第 6 题　设六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$，且其每一组对边互相平行。直线 AB、CD、EF 围成三角形 $\triangle_1$，直线 BC、DE、FA 围成三角形 $\triangle_2$。求证：$\triangle_1$ 与 $\triangle_2$ 的外心关于点 O 对称。