今天生日，发道简单的不等式纪念一下

2023-10-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a63a48a2afcbb5cf

问题：

正实数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 n，都有

$$a_{n+1}^2 \geq \frac{a_1^2}{1^3} + \frac{a_2^2}{2^3} + \cdots + \frac{a_n^2}{n^3}.$$

求证：存在正实数 N，使得

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > \frac{2023}{1013}.$$

解答（PDF 中已展开）

证明：

由柯西不等式，

$$a_{n+1}^2 \geq \frac{a_1^2}{1^3} + \frac{a_2^2}{2^3} + \cdots + \frac{a_n^2}{n^3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}$$

于是

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_1 + \cdots + a_n}\right)^2 \geq \frac{1}{1^3 + \cdots + n^3} = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2$$

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_1 + \cdots + a_n} \geq \dfrac{2}{n(n+1)}$.

因此

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \geq 2\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{N+1}$$

令 $2-\dfrac{2}{N+1}>\dfrac{2023}{1013}$，即 $N>\dfrac{2023}{3}$ 即可.

图片版：

问题. 正实数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 n，都有

$$a_{n+1}^2 \geq \frac{a_1^2}{1^3}+\frac{a_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^3}.$$

求证：存在正实数 N，使得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}>\frac{2023}{1013}.$$

证明 由柯西不等式，

$$a_{n+1}^2 \geq \frac{a_1^2}{1^3}+\frac{a_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^3} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{1^3+2^3+\cdots+n^3}$$

于是

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_1+\cdots+a_n}\right)^2 \geq \frac{1}{1^3+\cdots+n^3}=\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2$$

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_1+\cdots+a_n}\geq\dfrac{2}{n(n+1)}$.

因此

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geq 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{N+1}$$

令 $2-\dfrac{2}{N+1}>\dfrac{2023}{1013}$，即 $N>\dfrac{2023}{3}$ 即可.

1

改编自一道老题（2013 年新加坡），改成了 2023 和 1013 两个数字，初学柯西不等式的同学就能很快做出来。

tex 文档：

```
1. 正实数列 $\{a_n\}$满足对任意正整数 $n$，都有 $$a_{n+1}^{2}\ge \frac{a_1^2}{1^3}+\frac{a_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^3}.$$ 求证：存在正实数 $N$，使得 $$\sum_{n=1}^N\frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}>\frac{2023}{1013}.$$

由柯西不等式，$$a_{n+1}^{2}\ge \frac{a_1^2}{1^3}+\frac{a_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^3}\ge \frac{(a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n})^{2}}{1^{3}+2^{3}+\cdots+n^{3}}$$ 于是 $$\left(\frac{a_{n+1}}{a_{1}+\cdots+a_{n}}\right)^{2}\ge\frac{1}{1^{3}+\cdots+n^{3}}=\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{2}$$ 即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_{1}+\cdots+a_{n}}\ge\frac{2}{n(n+1)}$. 因此 $$\sum_{n=1}^N\frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\ge 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right
```

)=2-\frac{2}{N+1}$$ 令 $2-\dfrac{2}{N+1}>\dfrac{2023}{1013}$，即 $N>\dfrac{2023}{3}$ 即可.

解答（PDF 中已展开）

\begin{document}\setDOCadd{../../}\begin{spacing}{1.3}\ex 正实数列$\{a_n\}$满足对任意正整数n，都有$$a_{n+1}^{2}\ge
↪ \frac{a_1^2}{1^3}+\frac{a_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^3}.$$
求证：存在正实数 N，使得 $$\sum_{n=1}^N\frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}>\frac{2023}{1013}.$$
\begin{proof}由柯西不等式，$$a_{n+1}^{2}\ge \frac{a_1^2}{1^3}+\frac{a_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^3}\ge
↪ \frac{(a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n})^{2}}{1^{3}+2^{3}+\cdots+n^{3}}$$
于是 $$\left(\frac{a_{n+1}}{a_{1}+\cdots+a_{n}}\right)^{2}\ge\frac{1}{1^{3}+\cdots+n^{3}}=\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{2}$$
即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_{1}+\cdots+a_{n}}\ge\frac{2}{n(n+1)}$.
因此$$\sum_{n=1}^N\frac{a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\ge
↪ 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{N+1}$$
令 $2-\dfrac{2}{N+1}>\dfrac{2023}{1013}$，即 $N>\dfrac{2023}{3}$ 即可. \end{proof}\end{spacing}\end{document}