2023 年希腊数学奥林匹克

2023-02-21　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a6a9087e4f78e8c1

初中组

1. 求所有满足以下方程组的三元实数组 (a,b,c)：

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab^3+bc^3+ca^3=0 \end{cases}$$

1. 在 $\triangle ABC$ 中，M、N 分别为 AB、AC 的中点．线段 BN 上两点 D、E 满足 $CD//ME$，$BD<BE$．求证：$BD=2\cdot EN$.

2. 求满足以下性质的矩形个数：
(1) 在平面直角坐标系下，每个顶点的坐标 (x,y) 满足 x、y 为非负整数，且 $x\le 8$，$y\le 8$；
(2) 每条边均与坐标轴平行；
(3) 设面积为 E，则 $30\le E\le 40$.

3. 求所有正整数 a、b，其中 $a>1$，使得 b 是 $a-1$ 的约数，$2a+1$ 是 $5b-3$ 的约数.

高中组

1. 求所有满足以下方程组的四元正实数组 (x,y,z,w)：

$$\begin{cases} \dfrac{xyz+1}{x+1}=\dfrac{yzw+1}{y+1}=\dfrac{zwx+1}{z+1}=\dfrac{wxy+1}{w+1} \\ x+y+z+w=48 \end{cases}$$

1. 给定 $\triangle ABC$，$AB>AC$，$\angle A$ 的角平分线和 BC 交于点 D，点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心．点 M 为线段 AD 的中点，MB 和 $\triangle BIC$ 外接圆的另一个交点为点 F．求证：$AF\perp FC$.

2. 求所有在十进制下恰由 n 个数码 2 和一个数码 5 组成的完全平方数 N，其中 n 为正整数.

3. 一个班上有 26 名学生，每张桌子上都坐着两名学生．突然，学生们决定换位置，使得所有原来同桌的两人均被分开．求最大的正整数 N，使得无论学生如何选择座位，最后总存在一个由 N 名学生组成的集合 S，其中的任意两名学生从未当过同桌.

昨天发的文章第三题翻译错了，删除之后去官网找了试题原文。看到还有初中组的题目，顺便也一起翻译了。