一道概率问题的解答

2025-08-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a6b88f5d9facf1a5

题目：

甲、乙两人进行若干次猜拳，两人约定若某次猜拳后甲累计胜过乙的次数大于猜拳次数的一半，则游戏结束，甲获胜，否则游戏继续进行. 则甲能在有限次猜拳后获胜的概率是 _____.

解答（PDF 中已展开）

解答：

每次猜拳甲胜的概率为 $\frac{1}{3}$，不胜的概率为 $\frac{2}{3}$，最终获胜条件为甲获胜次数减去不胜的次数首次等于 1. 这等价于如下问题：

对一件装备进行强化，初始等级为 0，每次强化有 $\frac{1}{3}$ 的概率等级 $+1$，$\frac{2}{3}$ 的概率等级 -1（装备等级可为任意整数）. 求能强化到 $+1$ 的概率.

我们定义装备的 “价值” 如下：k 级装备的价值为 2^k. 这样初始价值为 $2^0 = 1$，每次强化后的期望增加价值为

$$\tfrac{1}{3}\left(2^{k+1} - 2^k\right) + \tfrac{2}{3}\left(2^{k-1} - 2^k\right) = 0$$

即每次强化，期望价值不变.

这样在最终停止时，设有 p 的概率等级为 $+1$，则有 $1-p$ 的概率等级趋于 $-\infty$，于是

$$p \cdot 2^1 + (1-p) \cdot \lim_{n\to-\infty} 2^n = 1$$

即 $p = \dfrac{1}{2}$.

注：本题即为一侧吸收壁为 $-\infty$ 的马尔科夫过程，一般情况也可以用此方法解决，关键在于定义合适的 “价值”，使得期望不变. 当然，用一般的数列递推方法也可以解决，读者不妨自己尝试一下.