一道三元不等式及其加强

2021-04-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a6e05af1475ef286

题目 1 已知 a，b，c 为正实数，求证：

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2$$

（2013 年新疆预赛）

解答（PDF 中已展开）

证明由 Cauchy 不等式：

$$\begin{aligned}&\left(2+(a+b)^2\right)\left(c^2+2\right)\\ \geq&\left(\sqrt{2}c+\sqrt{2}(a+b)\right)^2\\ =&2(a+b+c)^2\end{aligned}$$

于是只需证明：

$$\begin{aligned}&2(a^2+2)(b^2+2)\geq 3\left(2+(a+b)^2\right)^2\\ \Longleftrightarrow\ &2a^2b^2+a^2+b^2-6ab+2\geq 0\\ \Longleftrightarrow\ &2(ab-1)^2+(a-b)^2\geq 0\end{aligned}$$

显然成立.

本题可以加强为如下不等式：

题目 2 已知 a，b，c 为正实数，求证：

$$\begin{aligned}&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\\ \geq&3(a+b+c)^2+(abc-1)^2\end{aligned}$$

解答（PDF 中已展开）

证明注意到

$$\begin{aligned}&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\\ &-3(a+b+c)^2-(abc-1)^2\\ =&7+a^2+b^2+c^2-6ab-6bc-6ca\\ &+2abc+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\\
&\quad+2(a-1)(b-1)(c-1)\\
&\quad+2(ab-1)^2+2(bc-1)^2+2(ca-1)^2
\end{aligned}$$

故原不等式在 a，b，c 均不小于 1 时成立.

a，b，c 中存在小于 1 的数时，不妨设

$$0<a<1$$

由均值不等式：

$$\begin{aligned}
&(b-1)^2+(c-1)^2+2(a-1)(b-1)(c-1)\\
\geq&(b-1)^2+(c-1)^2-2|(b-1)(c-1)|\\
\geq&0
\end{aligned}$$

于是原不等式也成立，证毕.