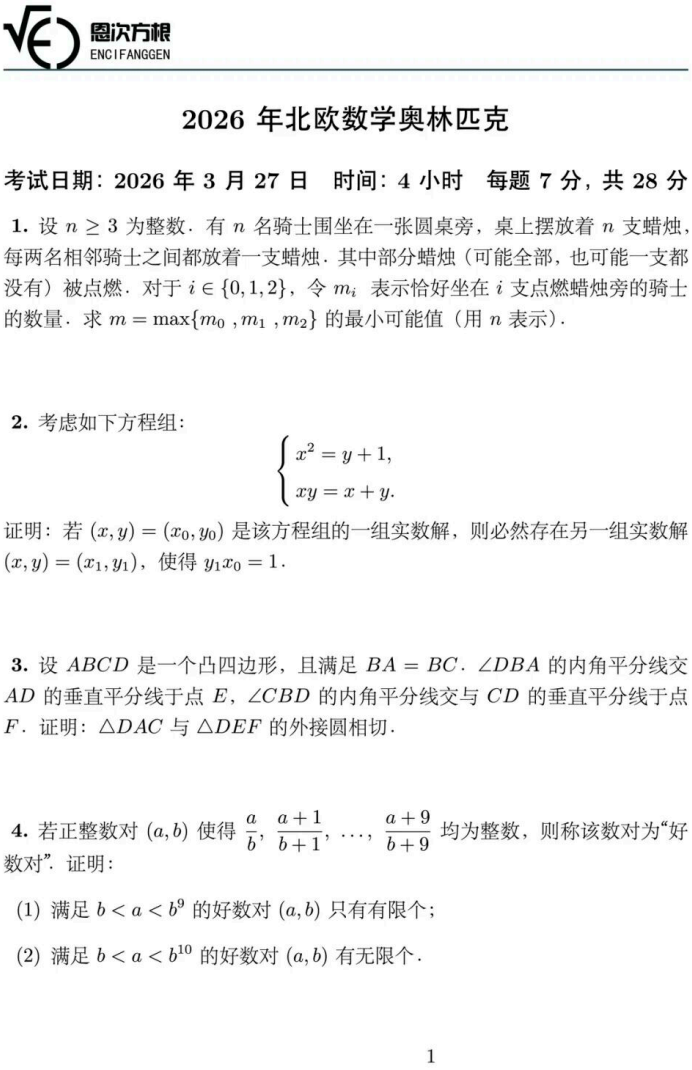
2026 年北欧数学竞赛

2026-03-31 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a6fc550e5707b93d

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



恩次方根
ENCIFANGGEN

2026 年北欧数学奥林匹克

考试日期：2026 年 3 月 27 日　时间：4 小时　每题 7 分，共 28 分

1. 设 $n \geq 3$ 为整数．有 n 名骑士围坐在一张圆桌旁，桌上摆放着 n 支蜡烛，每两名相邻骑士之间都放着一支蜡烛．其中部分蜡烛（可能全部，也可能一支都没有）被点燃．对于 $i \in \{0,1,2\}$，令 m_i 表示恰好坐在 i 支点燃蜡烛旁的骑士的数量．求 $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$ 的最小可能值（用 n 表示）．

2. 考虑如下方程组：

$$\begin{cases} x^2 = y + 1, \\ xy = x + y. \end{cases}$$

证明：若 $(x,y) = (x_0, y_0)$ 是该方程组的一组实数解，则必然存在另一组实数解 $(x,y) = (x_1, y_1)$，使得 $y_1 x_0 = 1$．

3. 设 $ABCD$ 是一个凸四边形，且满足 $BA = BC$．$\angle DBA$ 的内角平分线交 AD 的垂直平分线于点 E，$\angle CBD$ 的内角平分线交与 CD 的垂直平分线于点 F．证明：$\triangle DAC$ 与 $\triangle DEF$ 的外接圆相切．

4. 若正整数对 (a,b) 使得 $\frac{a}{b}$，$\frac{a+1}{b+1}$，$\ldots$，$\frac{a+9}{b+9}$ 均为整数，则称该数对为“好数对”．证明：

(1) 满足 $b < a < b^9$ 的好数对 (a,b) 只有有限个；

(2) 满足 $b < a < b^{10}$ 的好数对 (a,b) 有无限个．

1