一道数论难题的解答

2021-04-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a76f577e24e7c253

题目求所有满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^n \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$ 的正整数 n.

引理对于质数 p，有

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^n \equiv \begin{cases} p-1, & p-1 \mid n \\ 0, & p-1 \nmid n \end{cases} (\mathrm{mod}\ p)$$

引理的证明若 $p-1 \mid n$，则由 Fermat 小定理：$i^k \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. 故

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^n \equiv p-1(\mathrm{mod}\ p).$$

若 $p-1 \nmid n$，由 p 是质数知 p 存在原根 g，其满足 $g^k \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. 而 $\gcd(g,p)=1$，故 $g, 2g, \cdots, (p-1)g$ 为模 p 的一个简系. 因此

$$\sum_{i=1}^{p-1} (ig)^k \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^k (\mathrm{mod}\ p).$$

即

$$\left(g^k-1\right) \sum_{i=1}^{p-1} i^k \equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

而 $g^k-1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 即 $\gcd(g^k-1, p)=1$.

于是

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k \equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

引理证毕.

回到原题，设 $S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^n$，$n$ 为使 $S(n) \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$ 成立的正整数. 设 p 为 n 的一个质因子，且 $n=mp$.

则

$$S(n)=S(mp)=\sum_{i=1}^{mp} i^{mp} \equiv m \sum_{i=0}^{p-1} i^{mp} (\mathrm{mod}\ p).$$

由引理知，若 $p-1 \mid n$，则 $S(n) \equiv m(p-1)(\mathrm{mod}\ p)$;

若 $p-1 \nmid n$，则 $S(n) \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

所以我们有：若 $p \mid n$，则 $p-1 \mid n$．记为条件一．

若存在质数 p，使得 $p^2 \mid n$，设 $n = mp^2$．由前面知

$$S(n) = S(mp^2) \equiv mp \sum_{i=1}^{p-1} i^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p).$$

故 n 中无平方因子．记为条件二．

下面求同时满足条件一和二的所有正整数 n，记其集合为 X．将 X 中任意整数的任一质因子称作 X-质数．

显然 $2 \in X$，且 2 为 X-质数．
容易验证 $6 \in X$，故 3 为 X-质数；$42 \in X$，故 7 为 X-质数．

可猜测，若 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为 X-质数，且 $\prod_{i=1}^{k} p_i + 1$ 为质数，则 $\prod_{i=1}^{k} p_i + 1$ 为 X-质数．并由此得到 4 个 X-质数：$2, 3, 7, 43$．这由 $2, 6, 42, 1806 \in X$ 容易证明．

下证只有这 4 个 X-质数，否则存在一个最小的质数 y（不同于 $2, 3, 7, 43$）．设 $y \mid x$，$x \in X$．则 $y-1 \mid x$，且 $y-1$ 为若干个不同的 X-质数之积．
$y-1$ 的质因子必小于 y，故必为 $2, 3, 7, 43$ 之一，逐一枚举可得矛盾．故 X-质数只有 $2, 3, 7, 43$．
由此可得 $X = \{1, 2, 6, 42, 1806\}$．
