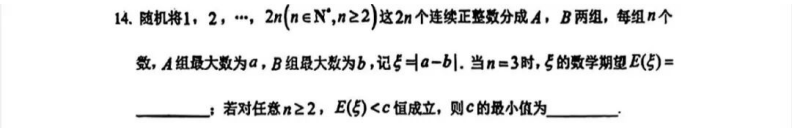
广州零模填空压轴数学期望的简单求法

2024-12-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a7874af6d45b9419



14. 随机将1，2，…，$2n\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\right)$这$2n$个连续正整数分成$A$，$B$两组，每组$n$个数，$A$组最大数为$a$，$B$组最大数为$b$，记$\xi=|a-b|$. 当$n=3$时，$\xi$的数学期望$E(\xi)=$_____；若对任意$n\geq 2$，$E(\xi)<c$恒成立，则$c$的最小值为_____.

最大数为 2n，只需考虑另一组的最大数。即求从 1 ~ 2n-1 中随机取 n 个数，最大数的数学期望（再用 2n 减去这个结果就行）。

考虑更一般的问题：

从 1 ~ m 中随机取 n 个数，求最大数的数学期望。

把 1 ~ m 按从左到右顺序排列好，从中取出 n 个数，那么剩下的数被空位分隔为了 n+1 段，长度之和为 m-n，由对称性（这个比较熟知，可以思考一下为什么每一段具有对称性），每一段长度 l_k 的数学期望相等，均为 (m-n)/(n+1).

取出的最大数为 n+l_1+…+l_n，其数学期望为 n+n*(m-n)/(n+1)=n(m+1)/(n+1).

取 m=2n-1，本题答案为：2n-n*2n/(n+1)=2n/(n+1).

注：对称性的简单解释如下

等价于将 m+1 个数排成一圈，去掉 n+1 个数（其中一个数作为首尾的分界，其余 n 个数为上面的数），剩余 m-n 个数。本问题与上面的问题是等价的，但对称性显而易见。