# 2022 年新疆预赛不等式的证明

2022-05-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a7d73a1e73a95471

## 题目

若 2023 个实数 $x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{2023}$ 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2023}^2=1$，求 $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{2022}-x_{2023}|+|x_{2023}-x_1|$ 的最大值.
（2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛新疆赛区选拔赛第 11 题）

## 解答（PDF 中已展开）

## 分析

证明关键是将差的绝对值放缩为平方和. 利用 Cauchy 不等式，有 $|x_i-x_{i+1}|^2\leq 2(x_i^2+x_{i+1}^2)$. 但在求等号成立条件时发现要求数列正负交错，这与 2023 为奇数矛盾. 因此联想到以下关于奇数项数列的一个小结论：

## 引理

给定 $n\in\mathbb{N}^+$ 为奇数，则 $x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$ 中存在相邻两个数相等或三个数成单调子列.

## 引理的证明

由 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})(x_{i+1}-x_{i+2})=\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2\geq 0$，知存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $(x_i-x_{i+1})(x_{i+1}-x_{i+2})\geq 0$，因此结论成立.

## 回到原题

不妨设 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)\geq 0$，即 $x_1-x_2$ 和 $x_2-x_3$ 同号. 则 $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|=|(x_1-x_2)+(x_2-x_3)|=|x_1-x_3|$.
因此

$$\begin{aligned}
&|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{2023}-x_1|\\
=&|x_1-x_3|+|x_3-x_4|+\cdots+|x_{2023}-x_1|\\
\leq&\sqrt{2022((x_1-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+\cdots+(x_{2023}-x_1)^2)}\\
\leq&\sqrt{2022\cdot 2(x_1^2+x_3^2+x_3^2+x_4^2+\cdots+x_{2023}^2+x_1^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq 2\sqrt{2022(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2023}^2)}\\&=2\sqrt{2022}\end{aligned}$$

在 $x_2=0$，$x_1=x_4=x_6=\cdots=x_{2022}=-x_3=-x_5=\cdots=-x_{2023}=\dfrac{1}{\sqrt{2022}}$ 时，等号成立，因此最大值为 $2\sqrt{2022}$.

**两个类似问题**

设 $n\geq 3$，$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n\in\mathbb{R}$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right](M-m)^2$，其中 $M=\max\limits_{1\leq i\leq n}a_i$，$m=\min\limits_{1\leq i\leq n}a_i$.

给定 $n\geq 4$，设 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,1]$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\left|x_i-x_{i+1}\right|$ 的最大值.

解答见 n 元不等式笔记（1）