一分钟做不等式系列（15）——2026 年土耳其 EGMO TST

2026-05-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a9193983633aae2f

下班前看到初中竞赛题选讲第八百五十八题，随手写一下。

题目： 设 $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_{1001} \le 1$ 为实数. 求

$S = \sum_{i=1}^{1001} x_i - \sum_{i=1}^{1001} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{1001} x_i x_{i+2}$

的最大可能值，其中 $x_{1002} = x_1, x_{1003} = x_2$.

解答（PDF 中已展开）

答案： 333.

构造： $x_3 = x_6 = \cdots = x_{999} = 1$，其余为 0.

证明：

$S = \sum\limits_{i=1}^{1001} x_i(1 - x_{i+1} - x_{i+2})$ 关于每个 x_i 线性，故只需考虑 $x_i \in \{0, 1\}$ 的情形.

令 $y_i = x_i(1 - x_{i+1} - x_{i+2})$，则

$$y_i = \begin{cases} 1, & x_i = 1, x_{i+1} = x_{i+2} = 0 \\ -1, & x_i = 1, x_{i+1} = x_{i+2} = 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

若 $y_k = 1$，则 $x_{k+1} = x_{k+2} = 0$，故 $y_{k+1} = y_{k+2} = 0$，因此

$y_i + y_{i+1} + y_{i+2} \le 1, \quad \forall 1 \le i \le 1001$

求和得 $3S = 3\sum\limits_{i=1}^{1001} y_i \le 1001 \implies S \le \left\lfloor \frac{1001}{3} \right\rfloor = 333.$