2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

2024-07-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a952083e38f21a63

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十年级组第一天

1. 设 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ 为 n 的全部正因数. 且 $d_2 - d_1, d_3 - d_2, \cdots, d_k - d_{k-1}$ 为 $1, 3, \cdots, 2k-3$ 的一个排列. 求 n 的所有可能值.

2. 一个正 2024 边形的一些顶点被标记，满足条件：对于任意正多边形，若其每个顶点均为这个正 2024 边形的顶点之一，则其至少有一个顶点被标记. 求被标记顶点数量的最小可能值.

3. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，都有

$$1 + f(xy) = f(x + f(y)) + (y-1)f(x-1).$$

4. 给定平行四边形 $ABCD$，$\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 和三边 AB，BC，CA 分别相切于点 R, P, Q. 射线 DI 和线段 AB 交于点 S. 已知 $\angle DPR = 90^\circ$. 求证：以 AS 为直径的圆与 $\triangle DPQ$ 的外接圆相切.

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十年级组第二天

5. 设 n 为正整数．在黑板上写出所有系数均为不超过 n 的正整数，且无实根的二次多项式．求所有的 n，使得被写下的多项式数量为偶数．

6. 设 ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆．ω 在 A 处和 C 处的切线交于点 K．直线 BK 和 ω 的另一个交点为点 M．在直线 BC 上取点 N，使得 $\angle BAN = 90^\circ$．直线 MN 和 ω 的另一个交点为点 D．求证：$BD = BC$．

7. 称正整数对 (k, n) 是有趣的，如果 n 为合数，且对其每个正因数 $d < n$，$d - k$ 和 $d + k$ 中至少有一个仍为 n 的因数．求所有有趣的正整数对 (k, n)，满足 $k \leq 100$．

8. 如图所示，将一个边长为 n 的正六边形分割为三种类型的图形，它们均为边长为 1，其中一个内角为 60° 的菱形：

在每次操作中，可以选择三个如  所示排列的菱形，然后将它们重新排列，如  所示．直到无法继续进行操作．

(1) 求证：操作次数只与初始状态有关，而和操作顺序无关．

(2) 对每个固定的正整数 n，求可操作次数的最大可能值．

2

因天气原因去不成东南赛了，翻译一套题目给学生做做。

题量和考试时间都和东南赛是一致的，难度上也比较接近。

高二组的明天翻译。

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十年级组第一天

1. 设 $1=d_{1}<d_{2}<\cdots<d_{k}=n$为 n的全部正因数．且 $d_{2}-d_{1}$,$d_{3}-d_{2}$,$\cdots$,$d_{k}-d_{k-1}$为 $1,3,\cdots,2k-3$的一个排列．求 n的所有可能值.

2. 一个正 2024边形的一些顶点被标记，满足条件：对于任意正多边形，若其每个顶点均为这个正 2024边形的顶点之一，则其至少有一个顶点被标记．求被标记顶点数量的最小可能值.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$1+f(xy)=f(x+f(y))+(y-1)f(x-1).$$

4. 给定平行四边形 $ABCD$，$\triangle ABC$的内切圆 $\odot I$和三边 AB，BC，CA

分别相切于点 R,P,Q. 射线 DI和线段 AB交于点 S. 已知 $\angle DPR=90^{\circ}$. 求证：以 AS为直径的圆与 $\triangle DPQ$的外接圆相切.

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十年级组第二天

5. 设 n为正整数. 在黑板上写出所有系数均为不超过 n的正整数，且无实根的二次多项式. 求所有的 n，使得被写下的多项式数量为偶数.

6. 设 ω为 $\triangle ABC$的外接圆. ω在 A处和 C处的切线交于点 K. 直线 BK和 ω的另一个交点为点 M. 在直线 BC上取点 N，使得 $\angle BAN=90^{\circ}$. 直线 MN和 ω的另一个交点为点 D. 求证：$BD=BC$.

7. 称正整数对 (k,n)是有趣的，如果 n为合数，且对其每个正因数 $d<n$，$d-k$和 $d+k$中至少有一个仍为 n的因数. 求所有有趣的正整数对 (k,n)，满足 $k\le 100$.

8. 如图所示，将一个边长为 n的正六边形分割为三种类型的图形，它们均为边长为 1，其中一个内角为 60°的菱形：

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0, 0);\coordinate (B) at (-150:1cm);\coordinate (C) at
↪  (150:1cm);\coordinate (D) at (0,1);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(A);\end{tikzpicture}}}
```

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0, 0);\coordinate (B) at (-30:1cm);\coordinate (C) at
↪  (30:1cm);\coordinate (D) at (0,1);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(A);\end{tikzpicture}}}
```

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0,0);\coordinate (B) at (30:1cm);\coordinate (C) at (0,1);\coordinate
↪  (D) at (150:1cm);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(A);\end{tikzpicture}}}
```

在每次操作中，可以选择三个如

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0,0);\coordinate (B) at (30:1cm);\coordinate (C) at
↪  (90:1cm);\coordinate (D) at (150:1cm);\coordinate (E) at (210:1cm);\coordinate (F) at (270:1cm);\coordinate (G) at
↪  (330:1cm);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(E)--(F)--(G)--(B);\draw (D)--(A)--(F);\end{tikzpicture}}}
```

所示排列的菱形，然后将它们重新排列，如

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

```
\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0,0);\coordinate (B) at (30:1cm);\coordinate (C) at
↪  (90:1cm);\coordinate (D) at (150:1cm);\coordinate (E) at (210:1cm);\coordinate (F) at (270:1cm);\coordinate (G) at
↪  (330:1cm);\draw (A)--(C)--(D)--(E)--(F)--(G)--(B)--(C);\draw (E)--(A)--(G);\end{tikzpicture}}}
```

所示. 直到无法继续进行操作.

1. 求证：操作次数只与初始状态有关，而和操作顺序无关.
2. 对每个固定的正整数 n，求可操作次数的最大可能值.

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年白俄罗斯数学奥林匹克}\section*{十年级组第一天}\ex 设$1=d_{1}<d_{2}<\cdots<d_{k}=n$为$n$的全部正因数.
↪ 且$d_{2}-d_{1}$,$d_{3}-d_{2}$,$\cdots$,$d_{k}-d_{k-1}$为$1,3,\cdots,2k-3$的一个排列. 求n的所有可能值. \vfill\ex
↪ 一个正2024边形的一些顶点被标记，满足条件：对于任意正多边形，若其每个顶点均为这个正2024边形的顶点之一，
↪ 则其至少有一个顶点被标记. 求被标记顶点数量的最小可能值. \vfill\ex 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，
↪ 使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有$$1+f(xy)=f(x+f(y))+(y-1)f(x-1).$$\vfill\ex 给定平行四边形$ABCD$，$\triangle
↪ ABC$的内切圆$\odot I$和三边$AB$，$BC$，$CA$分别相切于点$R,P,Q$. 射线$DI$和线段$AB$交于点$S$. 已知$\angle
↪ DPR=90^{\circ}$. 求证：以$AS$为直径的圆与$\triangle DPQ$的外接圆相切.
↪ \vfill\nextpage\section*{2024年白俄罗斯数学奥林匹克}\section*{十年级组第二天}\ex 设n为正整数.
↪ 在黑板上写出所有系数均为不超过n的正整数，且无实根的二次多项式. 求所有的n，使得被写下的多项式数量为偶数.
↪ \vfill\ex 设ω为$\triangle ABC$的外接圆. ω在A处和C处的切线交于点K.
↪ 直线BK和ω的另一个交点为点M. 在直线BC上取点N，使得$\angle BAN=90^{\circ}$.
↪ 直线MN和ω的另一个交点为点D. 求证：$BD=BC$. \vfill\ex 称正整数对(k,n)是有趣的，如果n为合数，
↪ 且对其每个正因数$d<n$，$d-k$和$d+k$中至少有一个仍为n的因数. 求所有有趣的正整数对(k,n)，满足$k\le 100$.
↪ \vfill\ex 如图所示，将一个边长为n的正六边形分割为三种类型的图形，它们均为边长为1，
↪ 其中一个内角为60°的菱形：此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）
↪ \vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0, 0);\coordinate (B) at (-150:1cm);\coordinate (C) at
↪ (150:1cm);\coordinate (D) at (0,1);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(A);\end{tikzpicture}}}

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0, 0);\coordinate (B) at (-30:1cm);\coordinate (C) at
↪ (30:1cm);\coordinate (D) at (0,1);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(A);\end{tikzpicture}}}

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0,0);\coordinate (B) at (30:1cm);\coordinate (C) at (0,1);\coordinate
↪ (D) at (150:1cm);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(A);\end{tikzpicture}}}

在每次操作中，可以选择三个如

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0,0);\coordinate (B) at (30:1cm);\coordinate (C) at
↪ (90:1cm);\coordinate (D) at (150:1cm);\coordinate (E) at (210:1cm);\coordinate (F) at (270:1cm);\coordinate (G) at
↪ (330:1cm);\draw (A)--(B)--(C)--(D)--(E)--(F)--(G)--(B);\draw (D)--(A)--(F);\end{tikzpicture}}}

所示排列的菱形，然后将它们重新排列，如

此处原为 TikZ 作图，源码照录（浏览器不渲染 TikZ）

\vcenter{\hbox{\begin{tikzpicture}[scale=0.5]\coordinate (A) at (0,0);\coordinate (B) at (30:1cm);\coordinate (C) at
↪ (90:1cm);\coordinate (D) at (150:1cm);\coordinate (E) at (210:1cm);\coordinate (F) at (270:1cm);\coordinate (G) at
↪ (330:1cm);\draw (A)--(C)--(D)--(E)--(F)--(G)--(B)--(C);\draw (E)--(A)--(G);\end{tikzpicture}}}

所示. 直到无法继续进行操作. \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证：操作次数只与初始状态有关，而和操作顺序无关. \item 对每个固定的正整数 n，求可操作次数的最大可能值. \end{enumerate}\vfill