2022 年土耳其数学奥林匹克（第二轮）

2022-12-25　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_a9bcd5d377ddaa5e

第一天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 边的中点，$\angle BAC$ 的角平分线和边 BC、圆 (ABC) 分别交于点 K、L. 如果以 BC 为直径的圆与 $\angle BAC$ 的外角平分线相切，求证：以 BC 为直径的圆也和圆 (KLM) 相切.

2. 对正整数 k 和 n，已知 $k \geq n!$. 求证：$\varphi(k) \geq (n-1)!$.

3. 非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2022}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{2022}=1$. 求满足 $a_i^2+a_j \geq \dfrac{1}{2021}$ 的有序数对 (i,j)，$1 \leq i,j \leq 2022$ 的个数的最大值.

第二天

1. 对怎样的实数 a，存在两两不同的实数 x,y,z，满足
$$\frac{x^3+a}{y+z}=\frac{y^3+a}{z+x}=\frac{z^3+a}{x+y}=-3$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$90^\circ > \angle A > \angle B > \angle C$. 设 O 和 H 分别为三角形的外心和垂心. 直线 OH 和 BC 交于点 T，$\triangle AHO$ 的外心为点 X. 求证：点 H 关于直线 XT 的对称点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

3. 一所拥有 2022 个学生的学校，在一个假期内每天都会组织一次博物馆之旅或自然之旅. 没有学生两次参加同一类型的旅行，而且每次参加旅行的学生人数都不同. 若没有两个学生同时参加相同的两次旅行，求旅行总次数的最大值.