Mathematical Reflections 2023 年第二期征解题

2023-03-18 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_aaec1fbad5baac31

Junior Problems

J619. 在 $\triangle ABC$ 中，
$AB^4+BC^4+CA^4=2AB^2\cdot BC^2+AB^2\cdot CA^2+2BC^2\cdot CA^2$.
求 $\angle A$ 的所有可能值.

J620. $\triangle ABC$ 为直角三角形，M 为斜边 BC 的中点. 已知 $AM^2=AB\cdot AC$，求 $\angle ACB$ 的值.

J621. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，I 为内心，X 为线段 BC 的中点. 直线 XI 和过顶点 A 的高交于点 Y，求证：$AY=r$.

J622. 实数 a，b，$c\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$. 求证：

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{b}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<2.$$

J623. 设 m_a，m_b，m_c 分别为 $\triangle ABC$ 的三条中线长. 求证：
$\dfrac{m_a^4}{m_b+m_c-m_a}+\dfrac{m_b^4}{m_c+m_a-m_b}+\dfrac{m_c^4}{m_a+m_b-m_c}\geq m_a^3+m_b^3+m_c^3$.

J624. 在 $\triangle ABC$ 中，点 M、N、P 分别为 BC、CA、AB 的中点，点 D、E、F 分别为 BC、CA、AB 上的垂足. 求证：
$\dfrac{DM+EN+FP}{2}\geq\max\{m_a,m_b,m_c\}-\min\{m_a,m_b,m_c\}$.

Senior Problems

S619. 设 a，b，$c\in[0,1]$，且至多一个为 0. 求证：
$\dfrac{ab+1}{a+b}+\dfrac{bc+1}{b+c}+\dfrac{ca+1}{c+a}\geq\dfrac{ab+bc+ca+3}{a+b+c}+1$.

S620. 设 a，b，c，d 为实数，求证：
$(abc+abd+acd+bcd)^2\geq 4abcd(ab+bc+cd+da)$.

S621. 求所有正整数 n，使得存在正整数 a，b，满足以 n、3^a、5^b 为三边，能构成一个非退化的三角形.

S622. $\triangle ABC$ 内接于圆 Γ，圆心为 O. 过点 A 和点 C 作 Γ 的切线，交于点 P. 直线 BP 和 Γ 交于点 Q，S 为 BQ 中点. 求证：$\angle ACQ=\angle BCS$.

S623. 设正实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 和 b_1，b_2，$\cdots$，b_n（$n\geq 2$）满足

$$\frac{a_1}{b_1}\geq\frac{a_2}{b_2}\geq\cdots\geq\frac{a_n}{b_n}.$$

求证：

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1+a_2}+\sqrt{b_2+a_3}+\cdot+\sqrt{b_{n-1}+a_n}+\sqrt{b_n}\\&>\sqrt{a_1+b_1}+\sqrt{a_2+b_2}+\cdots+\sqrt{a_n+b_n}\end{aligned}$$

S624. a，b，c 为正实数，求证：

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\sqrt{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt{\frac{a+b}{2c}}.$$

Undergraduate Problems

U619. 求所有实系数多项式 $P(x)$，使得对任意 x，$y\in\mathbb{R}$，都有
$P(x)(P(x)-2P(y))^2+(2P(x)-P(y))^2P(y)=P(xP(x))+P(yP(y))$.

U620. 计算：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2k^2-2nk+n^2}.$$

U621. 非负实数 x，y，z 满足 $x+y+z=2$. 求

$$\sqrt{4+2x^2}+\sqrt{54-36\sqrt{2}+4y^2}+\sqrt{8+2z^2}$$

的最小值.

U622. 在任意锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\left(\frac{4S}{3R}\right)^4\geq\frac{3\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{a^2+b^2+c^2}.$$

U623. 求所有实数 a，使得数列

$$x_n=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^a}$$

收敛. 并在此情况下求 $\{x_n\}$ 的极限.

U624. 设 p 为素数. 对任意正整数 n，定义 $\mathrm{rad}_p(n)$ 为 n 除 p 外的所有素因子之积. $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为一个积性函数，且存在非零整数 c，满足

$$\mathrm{rad}_p(n)\mid f(n+1)-c$$

求证：$f(n)=n^r$，其中 r 为某个正整数.

Olympiad Problems

O619. 设 l 为非负整数. 求证：存在无穷多个正整数 $k \geq l$，对每个正整数 k，均存在无穷多组连续 k 个正整数，使得这连续 k 个正整数中恰有 l 个数能表示为两个完全平方数之和.

O620. 求证：对任意正整数 n，至多存在一个三元正整数组 $a \leq b \leq c$，使得 $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c+n)$ 为一个素数的幂.

O621. 设 a_1，$\cdots$，a_k 为两两不同的正整数，b_1，$\cdots$，b_k 为整数，ϵ 为正实数. 求证：存在无穷多个正整数 n，使得 $(a_1n+b_1)\cdots(a_kn+b_k)$ 整除 $\lfloor \epsilon n \rfloor !$.

O622. 求所有正整数 n，使得能将 1，2，$\cdots$，n 按照某种顺序排列，并满足对任意 $1 \leq k \leq n$，前 k 个数之和均为 k 的倍数.

O623. 求证：存在正整数 n 和 2022 个不同的正整数 b_1、$\cdots$、b_{2022}，使得 n 在 b_1 进制、$\cdots$、b_{2022} 进制下，都是一个 2023 位的回文数.

O624. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCA = \angle DCA$. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的内切圆半径分别为 r_1 和 r_2. 设过点 C 且和射线 AC、AB 均相切的圆半径为 r_3，过点 C 且和射线 AC、AD 均相切的圆半径为 r_4. 求证：

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$