一道一试模拟题的分析过程

2021-07-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_abaedef51771d20b

今天，天神给我看了一道一试的模拟题，题目如下：

> 在集合 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm2010\}$ 中，能表示成 $\dfrac{x^3-y}{1+xy}(x,y\in\mathbb{N}_+,\ x<y)$ 的形式的个数是 _____.

开始以为这是一道无穷递降的题目，就是经过一番放缩分析得到这个分式只能是 0. 就像我在之前写的文章里做的一样。

算了算发现，事情并不简单。

首先设 $k=\dfrac{x^3-y}{1+xy}$，显然 k 不能为负. 否则有 $x^3<y$，于是有

$$0<|x^3-y|=y-x^3<y<1+xy$$

即

$$0<|k|=\left|\frac{x^3-y}{1+xy}\right|<1$$

$k=0$ 是成立的，此时取 $y=x^3$ 即可.

接下来考虑 $k>0$ 的情形，注意到

$$k=\frac{x^3-y}{1+xy}\iff y=\frac{x^3-k}{1+xk}$$

这表明，若 (x_0,y_0) 为方程 $k=\dfrac{x^3-y}{1+xy}$ 的一组正整数解，则 (x_0,k) 也为方程 $y=\dfrac{x^3-k}{1+xk}$ 的一组解.

以上删除部分是用无穷递降法解此题的错误所在. 这里的 k 是一个定值，交换 y 和 k 后方程也随之变化了.

这让我猜测此题应该有多个答案，于是尝试代入 $k=1$，$k=2$，分别得到如下结果：

1. $y=\dfrac{x^3-1}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{2}{x+1}\geq x^2-x$，在 $x=1$ 时，$y=0$，在 $x\geq2$ 时，$y\geq x$，故无解；
2. $y=\dfrac{x^3-2}{2x+1}$，此时要做的是代入合适的 x，让该分式取得一个整数值，这里比较麻烦的是两个 2，直觉告诉我，x 应该和 2 有关系，于是设 $x=2^n$，有
$$y=\frac{2^{3n}-2}{2^{n+1}+1}=2\cdot\frac{2^{3n-1}-1}{2^{n+1}+1}$$
发现取 $3n-1=2(n+1)$ 即 $n=3$ 就可以产生一个平方差公式了. 即此时 $x=8$，$n=30$.

其实做到这里，本题已经得到了解决，在 $k \geq 2$ 时，将上面的 $x = 8$，$y = 30$，替换成 $x = k^3$，$y = k^5 - k$，有

$$\frac{x^3 - y}{1 + xy} = \frac{k^9 - k^5 + k}{1 + k^8 - k^4} = k$$

于是本题答案为 $k = 0$ 或 $k \geq 2$，共有 2010 个.