2021 年全俄数学奥林匹克

2021-04-22 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ac35ff4077171206

九年级组

1. 在圆周上给定 10000 个点，每个点用 k 种颜色之一染色，已知在任意 5 条两两相交的线段中（其端点是 10 个互不相同的点），至少有 3 条线段，其中每条线段的两个端点颜色不同. 求 k 的最小可能值.

2. n 是一个自然数，若对于 n 的任意一个正因数 d（$d \neq n$）都有 $a^d + 2^d | a^n - 2^n$，则称 a 是“好数”，求出所有存在“好数”的合数 n 的所有可能值.

3. 一条直线上有 $n+1$ 条线段，使得直线上存在某点，其在所有这 $n+1$ 条线段上. 求证：其中必存在两条线段 I 和 J，使得 I 和 J 公共部分的长度不小于 $\dfrac{n-1}{n}d$，其中 d 为线段 I 的长度.

4. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 上一点，E 是 BC 延长线上一点，已知过 E 且与 AB 平行的直线与 $\triangle ADC$ 的外接圆相切，证明：点 E 关于 $\triangle BCD$ 外接圆的切线（与射线 BA 相交）在 $\angle ABE$ 内部截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

5. 已知实数 $b > 0$，a 满足二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个不等实数根，且恰有一实数根在区间 $[-1, 1]$ 上，证明：恰好有一个实数根在区间 $[-b, b]$ 上.

6. 在非等腰 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 60^\circ$，在三角形内取一点 T 满足 $\angle ATC = \angle BTC = \angle BTA = 120^\circ$，$M$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，记 TM 与圆 (ATC) 的另一交点为 K，求 $\dfrac{TM}{MK}$ 的值.

7. 已知正整数 $n > 20$ 及 $k > 1$，满足 n 被 k^2 整除. 求证：存在正整数 a，b，c，使得 $n = ab + bc + ca$.

8. 一百个智者玩以下游戏：他们以某种固定的顺序在房间前面等待，智者一个接一个地进入房间. 当智者进入房间时，房间中的守卫从集合 $\{1, 2, 3\}$ 中选择两个任意不同的数告诉智者. 然后，智者选择其中一个数，告诉守卫然后离开房间，下一个智者进入，依此类推. 比赛期间，在智者选择一个号码之前，他可以询问守卫，前两个智者选择的号码是什么. 在游戏中，智者不能互相交谈. 最后，当每个人都结束后，如果 100 个所选数字的总和恰好是 200，则该游戏将被视为失败；否则成功. 证明智者可以制定策略，以此赢得比赛.

十年级组

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F 为边 BC 上给定两点（E 在 B 和 F 之间），对角线 AC 和 BD 交于点 O. 已知 AE，DF 为 $\triangle AOD$ 外接圆的两条切线. 求证：AE，DF 也为 $\triangle EOF$ 外接圆的切线.

2. 求所有正整数组成的集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{20}\}$ 满足

$$x_{i+2}^2 = lcm(x_{i+1}, x_i) + lcm(x_i, x_{i-1})$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, 20$，且 $x_0 = x_{20}$，$x_{21} = x_1$，$x_{22} = x_2$.

3. 某国家有 N 个城市，其中一些成对的城市通过双向航线互相连接（每对城市之间最多一条双向航线），每条航线都属于 k 个公司之一. 已知现在可以从任意一个城市通过航线到任意的另一个城市，但当删除任意一家航空公司的所有航线时，便无法做到了. 该国家最多可能有多少个航空公司?

4. 给定自然数 $n > 4$，有 $2n + 4$ 张编号依次为 1，2，$\cdots$，$2n + 4$ 的卡片. 在编号为 m 的卡片上写有实数 a_m，使得 $\lfloor a_m \rfloor = m$. 求证：可以从中选出 4 张卡片，使得其中两张卡片上的数字之和与剩下两张卡片上的数字之和的差小于 $\dfrac{1}{n - \sqrt{\dfrac{n}{2}}}$.

5. 一位老师和她的 30 个学生在一个无限单元网格上进行如下游戏. 从老师开始，接着 30 个学生各进行一次操作，然后又轮到老师，一直这样进行下去. 每个人在一次操作中可以在网格中选取一条单元边（即两个相邻单元的公共边）进行染色，每条边不能被重复染色. 如果在若干次操作后，网格上存在一个 1×2 或 2×1 的矩形，其整个边框均被染色，但内部的一条单元边未被染色，则老师获胜. 求证：老师有获胜的策略.

6. 给定一个实系数多项式 $P(x)$，其次数 $n > 1$. 已知方程 $P(P(P(x))) = P(x)$ 有 n^3 个不同的实根. 求证：这些实根可以被分为算术平均数相等的两组.

7. 同九年级组第 7 题

8. 五边形 $ABCDE$ 内接于圆 k，CD 与 AB、AE 分别交于点 X、Y. 线段 EX 和 BY 交于点 P，且和圆 k 再次交于点 Q 和点 R. A' 为 A 关于 CD 的对称点，圆 (PQR) 和圆 $(A'XY)$ 交于 M 和 N 两点. 求证：CM 和 DN 的交点在圆 (PQR) 上.

十一年级组

1. 对于某些正整数 $n > m$，n 能表示成 m 的 2021 个非负整数次幂之和，也可以表示成 $m+1$ 的 2021 个非负整数次幂之和. 求正整数 m 的最大可能值.

2. 非零多项式 $P(x)$ 的次数 $n > 1$，且所有系数均为非负数，已知 $y = P(x)$ 为奇函数. 问：在 $y = P(x)$ 的图像 G 上是否存在 n 个点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 满足：G 在 A_1 处的切线经过 A_2，G 在 A_2 处的切线经过 A_3，……，G 在 A_n 处的切线经过 A_1?

3. 某种语言中只含有三个字母——A，B，C. 一个字母序列被称作一个单词当且仅当它恰好含有 100 个字母，使得其中 40 个字母是辅音字母（即 B 和 C），而剩余 60 个字母全为 A. 最多可以选取多少个不同的单词，对于其中任意两个单词，都存在一个相同的位置，使得这两个单词在该位置上恰好是两个不同的辅音字母?

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角平分线 AA_1 和 CC_1 交于点 I. 过 B 作 AC 的平行线分别交射线 AA_1, CC_1 于点 A_2，C_2. 设 O_a 和 O_c 分别为 $\triangle AC_1C_2$ 和 $\triangle CA_1A_2$ 的外心. 求证：$\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

5. 同十年级组第 5 题

6. 在四面体 $ABCS$ 中，任意两条边的长度都不相等. 在平面 BCS 中，作 S 关于 BC 中垂线的对称点 A'，类似地定义 B' 与 C' 点. 证明：平面 $ABC, AB'C', A'BC', A'B'C$ 经过同一个点.

7. 求 $(1, 2, \cdots, 2021)$ 的所有排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2021})$，使得对任意满足 $m - n > 20^{21}$ 的正整数 m 和 n，都有以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&\gcd(m+1, n+a_1)\\
+&\gcd(m+2, n+a_2)\\
+&\cdots\\
+&\gcd(m+2021, n+a_{2021})\\
<&2|m-n|
\end{aligned}$$

1. 已知 100 名女生中每名女生都有 100 个染有颜色的球，共有 10000 个球，其中共有 100 种颜色，每种颜色的球恰有 100 个. 她们可以进行如下操作：两名女生可以互相交换 1 个球（例如甲给乙 1 个球，乙给甲 1 个球），证明：存在一系列的操作，每个球最多交换 1 次，最后，每个女孩都有 100 个颜色互不相同的球.