2024 年印度 EGMO 代表队选拔考试不等式的解答

2024-01-05 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ac764f278ccc51d7

题目：

给定 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是正实数，求 $\sum\limits_{i=1}^{10} \left\lfloor \dfrac{7a_i}{a_i + a_{i+1}} \right\rfloor$ 的最小值，其中 $a_{11} = a_1$.

（来源：2024 印度 EGMO 代表队选拔考试中文翻译）

考虑更一般的情况：

m, n 为正整数，且 $n \geq 2$，给定 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，求 $\sum\limits_{i=1}^{n} \left\lfloor \dfrac{ma_i}{a_i + a_{i+1}} \right\rfloor$ 的最小值，其中 $a_{n+1} = a_1$.

解答（PDF 中已展开）

答案：

最小值为 $m-1$，当 $a_i = m^i (1 \leq i \leq n)$ 时，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{ma_i}{a_i + a_{i+1}} \right\rfloor \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{m \cdot m^i}{m^i + m^{i+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m \cdot m^n}{m^n + m} \right\rfloor \\
=&m-1
\end{aligned}$$

证明：

不妨设 a_n 最大，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{ma_i}{a_i + a_{i+1}} \right\rfloor \\
\geq& \left\lfloor \frac{ma_1}{a_1 + a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ma_n}{a_n + a_1} \right\rfloor \\
\geq& \left\lfloor \frac{ma_1}{a_1 + a_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ma_n}{a_n + a_1} \right\rfloor \\
\geq& \left\lfloor \frac{ma_1}{a_1 + a_n} + \frac{ma_n}{a_n + a_1} \right\rfloor - 1 \\
=&m-1
\end{aligned}$$

最后一个不等号用到了 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \geq \lfloor x + y \rfloor - 1$.

注：

AoPS 上还有一个解答用到了 7 和 10 两个数字的特殊性，可以将结论推广至 m 和 $n \geq 2m-4$，大家可以自己试试.