2024 年白俄罗斯数学奥林匹克十一年级组

2024-07-29 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_acb1ed1c4e6b10e1

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十一年级组第一天

1. 设 m,n 为大于 1 的整数. 给定 $m+n$ 个不超过 $mn-1$ 的正整数. 求证: 其中必存在两个整数 $x \neq y$, 使得 $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor = \lfloor \frac{y}{n} \rfloor$, 且 $\lfloor \frac{x}{m} \rfloor = \lfloor \frac{y}{m} \rfloor$.

2. 给定 29 个二次多项式 $f_1(x), \cdots, f_{29}(x)$ 和 15 个实数 $x_1 < \cdots < x_{15}$. 求证: 对给定的两个多项式 $f_i(x)$ 和 $f_j(x)$, 下面的不等式成立:

$$\sum_{k=1}^{14} (f_i(x_{k+1}) - f_i(x_k))(f_j(x_{k+1}) - f_j(x_k)) > 0.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, I 为内心, I_A 为 A 所对的旁心, W 为 $\triangle ABC$ 的外接圆 ω 上弧 BAC 的中点. 点 H 为 I_A 在 IW 上的射影. 过点 I 作 $\triangle BIC$ 外接圆的切线, 和 ω 交于点 E,F. 求证: AI 的中垂线与 $\triangle EFH$ 的外接圆相切.

4. 由正整数构成的非空集合 M 具有性质:若正整数 $a_1, \cdots, a_{2024}$ (不必互异) 在 M 中, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2024}$ 也在 M 中. 求证: 所有不小于 2049 的数都在 M 中.

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十一年级组第二天

5. 在圆 ω 的弦 AB 上取点 C 和 D，使得点 C 位于 A 和 D 之间，且 $AC = BD$. 在 ω 上取点 E 和 F，使得 E 和 F 位于直线 AB 的异侧，满足 EC 和 FD 均垂直于 AB. $\angle AEB$ 的角平分线与直线 DF 相交于 R.

求证：以 F 为圆心，FR 为半径的圆与 ω 相切.

6. 设 $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$ 为全体素数. 求证：对任意正整数 $n \geq 3$，至少存在 $p_n + n - 1$ 个不超过 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的素数.

7. 正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足条件

$$2a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = a_n + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.$$

对任意正整数 $n \geq 3$，求下式的最小可能值：

$$\frac{(a_1 + 1)^2}{a_2} + \cdots + \frac{(a_{n-1} + 1)^2}{a_n}.$$

8. 投影仪在空间中发射出一些光线. 考虑光线所成的所有锐角，已知任意去掉一条光线都会使锐角的数量减少 2. 投影仪能发出的最大光线数量是多少?



2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十一年级组第一天

1. 设 m,n为大于 1的整数. 给定 $m+n$个不超过 $mn-1$的正整数. 求证：其中必存在两个整数 $x\neq y$，使得 $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor = \lfloor \frac{y}{n} \rfloor$，且 $\lfloor \frac{x}{m} \rfloor = \lfloor \frac{y}{m} \rfloor$.

2. 给定 29个二次多项式 $f_{1}(x),\cdots,f_{29}(x)$和 15个实数 $x_{1}<\cdots<x_{15}$. 求证：对给定的两个多项式 $f_{i}(x)$和 $f_{j}(x)$，下面的不等式成立：$$\sum_{k=1}^{14} (f_i(x_{k+1})-f_i(x_k))(f_j(x_{k+1})-f_j(x_k))>0.$$

3. 在 $\triangle ABC$中，I为内心，I_{A}为 A所对的旁心，W为 $\triangle ABC$的外接圆 ω上弧 BAC的中点. 点 H为 I_{A}在 IW上的射影. 过点 I作 $\triangle BIC$外接圆的切线，和 ω交于点 E,F. 求证：AI的中垂线与 $\triangle EFH$的外接圆相切.

4. 由正整数构成的非空集合 M具有性质：若正整数 $a_{1},\cdots,a_{2024}$（不必互异）在 M中，则 $a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{2024}$也在 M中. 求证：所有不小于 2049的数都在 M中.

2024 年白俄罗斯数学奥林匹克

十一年级组第二天

5. 在圆 ω的弦 AB上取点 C和 D，使得点 C位于 A和 D之间，且 $AC=BD$. 在 ω上取点 E和 F，使得 E和 F位于直线 AB的异侧，满足 EC和 FD均垂直于 AB. $\angle AEB$的角平分线与直线 DF相交于 R. 求证：以 F为圆心，FR为半径的圆与 ω相切.

6. 设 $2=p_{1}<p_{2}<\cdots<p_{n}<\cdots$为全体素数. 求证：对任意正整数 $n\ge 3$，至少存在 $p_{n}+n-1$个不超过 $p_{1}p_{2}\cdots p_{n}$的素数.

7. 正实数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$满足条件 $$2a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+\frac{n^2-3n+2}{2}.$$ 对任意正整数 $n\ge 3$，求下式的最小可能值：$$\frac{(a_1+1)^2}{a_2}+\cdots+\frac{(a_{n-1}+1)^2}{a_n}.$$

8. 投影仪在空间中发射出一些光线. 考虑光线所成的所有锐角，已知任意去掉一条光线都会使锐角的数量减少 2. 投影仪能发出的最大光线数量是多少?

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年白俄罗斯数学奥林匹克}\section*{十一年级组第一天}\ex 设$m,n$为大于$1$的整数.
↪ 给定$m+n$个不超过$mn-1$的正整数. 求证：其中必存在两个整数$x\neq y$，使得$\lfloor \frac{x}{n} \rfloor = \lfloor \frac{y}{n}
↪ \rfloor$，且$\lfloor \frac{x}{m} \rfloor = \lfloor \frac{y}{m} \rfloor$. \vfill\ex
↪ 给定$29$个二次多项式$f_{1}(x),\cdots,f_{29}(x)$和$15$个实数$x_{1}<\cdots<x_{15}$. 求证：
↪ 对给定的两个多项式$f_{i}(x)$和$f_{j}(x)$，下面的不等式成立：$$\sum_{k=1}^{14}
↪ (f_i(x_{k+1})-f_i(x_k))(f_j(x_{k+1})-f_j(x_k))>0.$$\vfill\ex 在$\triangle ABC$中，$I$为内心，$I_{A}$为$A$所对的旁心，
↪ $W$为$\triangle ABC$的外接圆$\omega$上弧$BAC$的中点. 点$H$为$I_{A}$在$IW$上的射影. 过点$I$作$\triangle
↪ BIC$外接圆的切线，和$\omega$交于点$E,F$. 求证：$AI$的中垂线与$\triangle EFH$的外接圆相切. \vfill\ex
↪ 由正整数构成的非空集合$M$具有性质：若正整数$a_{1},\cdots,a_{2024}$（不必互异）在$M$中，
↪ 则$a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{2024}$也在$M$中. 求证：所有不小于$2049$的数都在$M$中.
↪ \vfill\nextpage\section*{2024年白俄罗斯数学奥林匹克}\section*{十一年级组第二天}\ex
↪ 在圆$\omega$的弦$AB$上取点$C$和$D$，使得点$C$位于$A$和$D$之间，且$AC=BD$. 在 $\omega$上取点$E$和$F$，
↪ 使得$E$和$F$位于直线$AB$的异侧，满足$EC$和$FD$均垂直于$AB$. $\angle AEB$的角平分线与直线$DF$相交于$R$.
求证：以$F$为圆心，$FR$为半径的圆与$\omega$相切. \vfill\ex 设$2=p_{1}<p_{2}<\cdots<p_{n}<\cdots$为全体素数. 求证：
↪ 对任意正整数$n\ge 3$，至少存在$p_{n}+n-1$个不超过$p_{1}p_{2}\cdots p_{n}$的素数. \vfill\ex
↪ 正实数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$满足条件$$2a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+\frac{n^2-3n+2}{2}.$$
对任意正整数$n\ge 3$，求下式的最小可能值：$$\frac{(a_1+1)^2}{a_2}+\cdots+\frac{(a_{n-1}+1)^2}{a_n}.$$\vfill\ex
↪ 投影仪在空间中发射出一些光线. 考虑光线所成的所有锐角，已知任意去掉一条光线都会使锐角的数量减少$2$.
↪ 投影仪能发出的最大光线数量是多少？\vfill
```