加拿大 CRUX 杂志问题 4781-4790

2022-11-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_acce0bc6893375d6

1. 设 $\mathcal{C}$ 为所有互质的正整数对组成的集合. 设 $d(m,n)=\gcd\{2m(m+n),n(10m+n),n^2+10m^2+2mn\}$ 求 $\{d(m,n)\mid(m,n)\in\mathcal{C}\}$.

2. 设 A 为所有满足 $1\le n\le 2022$，且 $\gcd(n,2022)=1$ 的整数 n 组成的集合. 对任意非负整数 j，设 $S(j)=\sum\limits_{n\in A}n^j$. 求证:

$$S(j)\equiv\begin{cases}0, & \text{若}336\nmid j\\ 672, & \text{若}336\mid j\end{cases}\pmod{2022}$$

1. 求证：单位圆上三点 A,B,C 构成等边三角形的三个顶点的充要条件是它们所对应的复数 a,b,c 满足 $\frac{a}{2(b+c)-a}+\frac{b}{2(c+a)-b}+\frac{c}{2(a+b)-c}=-1$

2. 给定三角形 ABC 和 CA 延长线上一点 D，满足 $AD=AB$. 设 $\angle BAC$ 的角平分线和 BC 交于点 E，F 为 AE 中点，CF 交 AB 于点 G. 求证：D、G、E 三点共线.

3. 四边形 $ABCD$ 内接于一个半径为 R 的圆，且面积为 F. 求证:

$$\frac{\sum\tan^2\dfrac{A}{2}}{\sum\cos^4\dfrac{A}{2}}\le\frac{16R^4}{F^2}$$

1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{m_am_b}\right)\left(4s+\sum_{cyc}\frac{bc}{a}\right)\ge\frac{54}{s}$$

1. 计算:

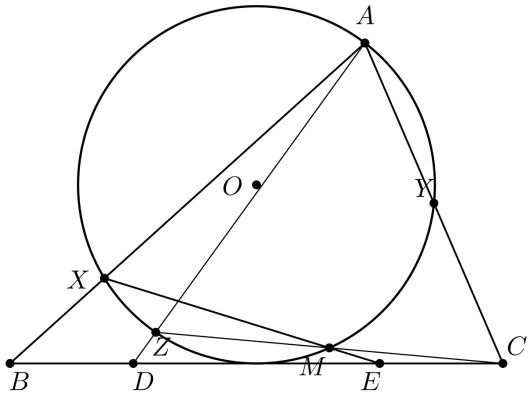
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tan^2x}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{4+\sec^2x}$$

1. 解方程:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\left(x^{2^k}+1\right)^2=0$$

其中 $|x|<1$.

1. $\triangle ABC$ 的边 BC 上有 D,E 两点，满足 $4BD=4CE=BC$. 圆 Γ 过点 A，且与线段 CD 相切，圆心为 O，和 AB,AC,AD 分别再次交于点 X,Y,Z. 若 Γ 和 EX 均过线段 CZ 的中点. 求证：C,Y,Z,O 四点共圆.



1. 解方程组：

$$\begin{cases}x\cos^3 y+3x\sin^2 y\cos y=14\\ x\sin^3 y+3x\cos^2 y\sin y=13\end{cases}$$