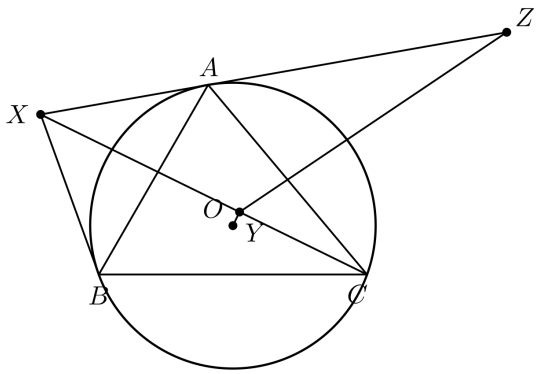
2022 年巴尔干数学奥林匹克

2022-05-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ad90def0e97a44e8

1. 锐角三角形 ABC 满足 $CA \neq CB$，其外接圆为 ω，外心为 O. 设 t_A 和 t_B 分别为 ω 在点 A 和点 B 处的切线，且相交于点 X. 点 Y 为点 O 在线段 CX 上的射影. 过点 C 作 AB 的平行线交 t_A 于点 Z. 求证：直线 YZ 平分线段 AC.



1. 设 a，b 和 n 均为正整数，且 $a > b$，满足以下条件：
   (1)$a^{2021} \mid n$;
   (2)$b^{2021} \mid n$;
   (3)$2022 \mid a - b$.
   求证：存在 n 的正约数集的一个子集 T，使得 T 中所有元素之和能被 2022 整除，但不能被 2022^2 整除.

2. 求所有函数 $f{:}(0,+\infty) \to (0,+\infty)$，满足对任意 $x, y > 0$，都有

$$f(y(f(x))^3 + x) = x^3 f(y) + f(x).$$

3. 考虑一个由 n^2 个单元格组成但 $n \times n$ 网格，其中 $n \geq 3$ 为一个给定的正奇数. 起初，Dionysus 将每个每个单元格染成红、蓝二色之一. 当且仅当两个单元格同色且至少有一个

公共的顶点时，青蛙能从一个一个单元格跳到另一个单元格. 然后 Xanthias 查看了染色情况，并且在网格的单元格中放置了 k 只青蛙，使得这 n^2 个单元格中的任意一个都可以被某只青蛙在有限次跳跃内（可能为零）到达. 求 k 的最小值，使得对于任意的染色方式，这都是可以达到的.

（译者注：Dionysus 和 Xanthias 出自阿里斯托芬的《蛙》）