2024 年澳大利亚数学奥林匹克

2024-03-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ae6d85d37142edcf

2024 年澳大利亚数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 求所有三元正整数组 (k,m,n)，使得

$$k!+m!=k!n!.$$

2. 设 $ABCD$ 为圆内接四边形．点 P 在直线 CB 上，满足 $CP=CA$，且点 B 在 C,P 之间．点 Q 在直线 CD 上，满足 $CQ=CA$，且点 D 在 C,Q 之间．求证：$\triangle ABD$ 的内心在直线 PQ 上．

3. 设 $n\geq 2$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正实数．对 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的一个排列 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义其分数为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i^2}{b_{i+1}},$$

求证：存在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的两个排列，它们的分数不超过 $3|a_1-a_n|$．

4. 考虑一个 2024×2024 的方格网．如果两个不同的单元格有一条共同边，那么称它们是相邻的．将每个单元格染为黑、白二色之一．如果方格网中的每个单元格都与偶数个黑色单元格相邻，那么称这种染色方式是**偶数的**．求**偶数的**染色方法总数．

2024 年澳大利亚数学奥林匹克

程国根　译

第二天

5. 正整数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2025}$ 定义如下：$a_1 = 2^{2024} + 1$，且对 $1 \leq n \leq 2024$，a_{n+1} 为 $a_n^2 - 1$ 的最大素因子．求 $a_{2024} + a_{2025}$ 的值．

6. 一所学校有一年级到十二年级，每个年级有 1000 名的学生．学校有 12000 个储物柜，编号为 1 到 12000．校长要求给每个学生分配自己的储物柜，以满足以下条件：对于同一年级的每一对学生，他们的储物柜编号之差必须能被他们的年级编号整除．校长的要求能被满足吗?

7. 设 $ABCD$ 为矩形，P 为边 AB 上一点．点 Q 在矩形外部，满足 $\angle ABQ = \angle ADP$，$\angle AQB = 90^\circ$．点 R 在边 BC 上，满足 $\angle BAR = \angle ADQ$．求证：AR, CQ, DP 三线共点．

8. 设实数 $r = 0.d_0d_1d_2\cdots$．用 e_n 表示将数码 $d_n, d_{n-1}, \cdots, d_0$ 从左到右写成的数字（允许最高位为零）．已知 $d_0 = 6$，且对任意 $n \geq 0$，e_n 恰等于 e_n^2 的末 $n+1$ 位组成的数字．求证：r 为无理数．

2024 年澳大利亚数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 求所有三元正整数组 (k,m,n)，使得 $$k!+m!=k!n!.$$

2. 设 $ABCD$为圆内接四边形．点 P在直线 CB上，满足 $CP=CA$，且点 B在 C,P之间．点 Q在直线 CD上，满足 $CQ=CA$，且点 D在 C,Q之间．求证：$\triangle ABD$的内心在直线 PQ上.

3. 设 $n\ge 2$，$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$为正实数．对 $(a_{1},a_{2},\cdots,a_{n})$的一个排列 $(b_{1},b_{2},\cdots,b_{n})$，定义其分数为 $$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{i}^{2}}{b_{i+1}},$$ 求证：存在 $(a_{1},a_{2},\cdots,a_{n})$的两个排列，它们的分数不超过 $3|a_{1}-a_{n}|$.

4. 考虑一个 2024×2024的方格网．如果两个不同的单元格有一条共同边，那么称它们是相邻的．将每个单元格染为黑、白二色之一．如果方格网中的每个单元格都与偶数个黑色单元格相邻，那么称这种染色方式是**偶数的**．求**偶数的**染色方法总数.

2024 年澳大利亚数学奥林匹克

程国根　译

第二天

5. 正整数数列 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{2025}$定义如下：$a_{1}=2^{2024}+1$，且对 $1\le n\le 2024$，a_{n+1}为 $a_{n}^{2}-1$的最大素因子．求 $a_{2024}+a_{2025}$的值.

6. 一所学校有一年级到十二年级，每个年级有 1000名的学生．学校有 12000个储物柜，编号为 1到 12000．校长要求给每个学生分配自己的储物柜，以满足以下条件：对于同一年级的每一对学生，他们的储物柜编号之差必须能被他们的年级编号整除．校长的要求能被满足吗?

7. 设 $ABCD$为矩形，P为边 AB上一点．点 Q在矩形外部，满足 $\angle ABQ=\angle ADP$，$\angle AQB=90^{\circ}$．点 R在边 BC上，满足 $\angle BAR=\angle ADQ$．求证：AR,CQ,DP三线共点.

8. 设实数 $r=0.d_{0}d_{1}d_{2}\cdots$．用 e_{n}表示将数码 $d_{n},d_{n-1},\cdots,d_{0}$从左到右写成的数字（允许最高位为零）．已知 $d_{0}=6$，且对任意 $n\ge 0$，e_{n}恰等于 e_{n}^{2}的末 $n+1$位组成的数字．求证：r为无理数.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年澳大利亚数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\section*{第一天}\ex
↪ 求所有三元正整数组$(k,m,n)$，使得$$k!+m!=k!n!.$$\vfill\ex 设$ABCD$为圆内接四边形．点$P$在直线$CB$上，
↪ 满足$CP=CA$，且点$B$在$C,P$之间．点$Q$在直线$CD$上，满足$CQ=CA$，且点$D$在$C,Q$之间．求证：$\triangle
↪ ABD$的内心在直线$PQ$上．\vfill\ex 设$n\ge 2$，$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$为正实数．
↪ 对$(a_{1},a_{2},\cdots,a_{n})$的一个排列$(b_{1},b_{2},\cdots,b_{n})$，
↪ 定义其分数为$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{i}^{2}}{b_{i+1}},$$
求证：存在$(a_{1},a_{2},\cdots,a_{n})$的两个排列，它们的分数不超过$3|a_{1}-a_{n}|$．\vfill\ex 考虑一个$2024\times
↪ 2024$的方格网．如果两个不同的单元格有一条共同边，那么称它们是相邻的．将每个单元格染为黑、白二色之一．
↪ 如果方格网中的每个单元格都与偶数个黑色单元格相邻，那么称这种染色方式是\textbf{偶数的}.
↪ 求\textbf{偶数的}染色方法总数．\vfill\newpage\section*{2024年澳大利亚数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad
↪ 译\end{flushright}\section*{第二天}\ex 正整数数列$a_{1},a_{2},\cdots,a_{2025}$定义如下：$a_{1}=2^{2024}+1$，且对$1\le
↪ n\le 2024$，$a_{n+1}$为$a_{n}^{2}-1$的最大素因子．求$a_{2024}+a_{2025}$的值．\vfill\ex 一所学校有一年级到十二年级，
↪ 每个年级有$1000$名的学生．学校有$12000$个储物柜，编号为$1$到$12000$．校长要求给每个学生分配自己的储物柜，
↪ 以满足以下条件：对于同一年级的每一对学生，他们的储物柜编号之差必须能被他们的年级编号整除．校长的要求能被满足吗？
↪ \vfill\ex 设$ABCD$为矩形，$P$为边$AB$上一点．点$Q$在矩形外部，满足$\angle ABQ=\angle ADP$，$\angle
↪ AQB=90^{\circ}$．点$R$在边$BC$上，满足$\angle BAR=\angle ADQ$．求证：$AR,CQ,DP$三线共点．\vfill\ex
↪ 设实数$r=0.d_{0}d_{1}d_{2}\cdots$．用$e_{n}$表示将数码$d_{n},d_{n-1},\cdots,d_{0}$从左到右写成的数字（允许最高位为零）
↪ ．已知$d_{0}=6$，且对任意$n\ge 0$，$e_{n}$恰等于$e_{n}^{2}$的末$n+1$位组成的数字．求证：$r$为无理数．\vfill
```