北京大学 2023 年“物理学科卓越人才培养计划”数学试题解答

2023-01-10　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ae707b0b0f984816

1. 已知 n 个整数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 使 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=2008$，求 n 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

2008 不为完全立方数，故 $n\neq 1$.

若 $n=2$，则存在整数 a，b，使得

$$\begin{aligned}2008&=a^3+b^3\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\&=(a+b)((a+b)^2-3ab)\end{aligned}$$

模 3 可知，$a+b\equiv 1\pmod 3$，且 $a+b=\dfrac{2008}{a^2-ab+b^2}>0$，$a+b\mid 2008$.

于是 $a+b$ 只能取 1，4，502，2008，经检验，都不符合.

若 $n=3$，容易发现

$$\begin{aligned}2008&=2^3\times 251\\&=2^3\times(216+27+8)\\&=12^3+6^3+4^3\end{aligned}$$

于是 n 的最小值为 3.

注：

本题背景为三立方和问题，最近的一个结果是 2019 年 Andrew Booker 和 Andrew Sutherland 得到的

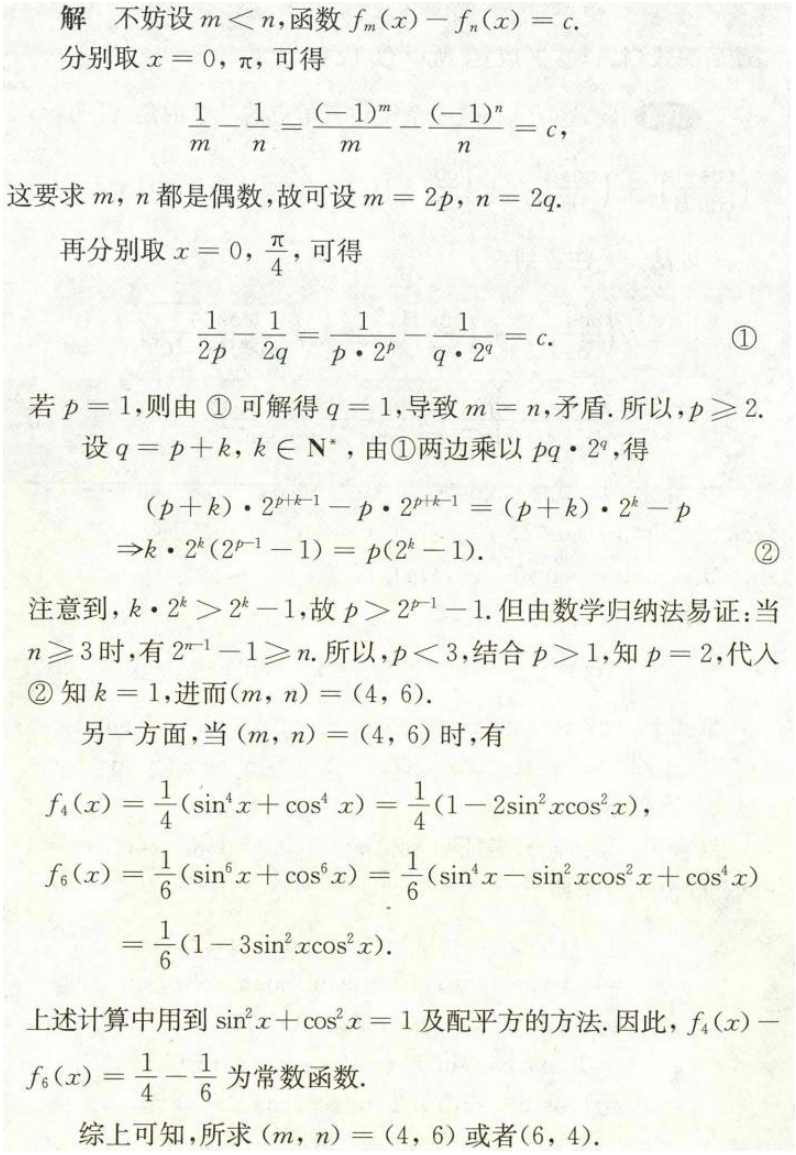
$$\begin{aligned}42=&(-80538738812075974)^3\\&+80435758145817515^3\\&+12602123297335631^3\end{aligned}$$

1. 设 $f_k(x)=\dfrac{\sin^k x+\cos^k x}{k}$，求所有的正整数 n 大于 m，使 $f_n(x)-f_m(x)$ 是一个常值函数.

解答（PDF 中已展开）

解答：

陈题，偷懒直接贴个答案，也基本没有别的好方法。



解　不妨设 $m<n$，函数 $f_m(x)-f_n(x)=c$.

分别取 $x=0$，π，可得

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{(-1)^m}{m}-\frac{(-1)^n}{n}=c,$$

这要求 m，n 都是偶数，故可设 $m=2p$，$n=2q$.

再分别取 $x=0$，$\frac{\pi}{4}$，可得

$$\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}=\frac{1}{p\cdot 2^p}-\frac{1}{q\cdot 2^q}=c. \qquad ①$$

若 $p=1$，则由 ① 可解得 $q=1$，导致 $m=n$，矛盾. 所以，$p\geqslant 2$.

设 $q=p+k$，$k\in\mathbf{N}^*$，由①两边乘以 $pq\cdot 2^q$，得

$$(p+k)\cdot 2^{p+k-1}-p\cdot 2^{p+k-1}=(p+k)\cdot 2^k-p$$
$$\Rightarrow k\cdot 2^k(2^{p-1}-1)=p(2^k-1). \qquad ②$$

注意到，$k\cdot 2^k>2^k-1$，故 $p>2^{p-1}-1$. 但由数学归纳法易证：当 $n\geqslant 3$ 时，有 $2^{n-1}-1\geqslant n$. 所以，$p<3$，结合 $p>1$，知 $p=2$，代入 ② 知 $k=1$，进而 $(m,n)=(4,6)$.

另一方面，当 $(m,n)=(4,6)$ 时，有

$$f_4(x)=\frac{1}{4}(\sin^4x+\cos^4x)=\frac{1}{4}(1-2\sin^2x\cos^2x),$$

$$f_6(x)=\frac{1}{6}(\sin^6x+\cos^6x)=\frac{1}{6}(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)$$
$$=\frac{1}{6}(1-3\sin^2x\cos^2x).$$

上述计算中用到 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 及配平方的方法. 因此，$f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ 为常数函数.

综上可知，所求 $(m,n)=(4,6)$ 或者 $(6,4)$.

1. 对任意的 n 有 $a_{a_n}=3n$，且 $\{a_n\}$ 为单调递增的正整数数列，求 a_{2022}.

解答（PDF 中已展开）

解答：

一道被各国竞赛考过很多次的陈题，上一次见到是 2021 年平行线的百子选拔．主要思路是利用单调递增卡住两个数之间的所有项的取值.

为方便书写，用 $f(f(n))$ 代替 a_{a_n}.

由 $f(f(n))=3n$ 知，$f(f(f(n)))=f(3n)$，故 $3f(n)=f(3n)$.

由于对任意 $n\in\mathbb{N}_+$，$f(f(n))=3n$，所以 $\{3k\mid k\in\mathbb{N}_+\}$ 包含于值域.

由 $f(f(1))=3$，考察 $f(1)$ 的取值.

若 $f(1)=1$，则 $f(f(1))=f(1)=1$，矛盾.

若 $f(1)=t\geq 3$，则 $3=f(f(1))=f(t)\geq f(3)>f(1)\geq 3$，矛盾.

故 $f(1)=2$，$f(3)=3f(1)=6$.

由于 3 在值域中，且 $f(1)<3<f(3)$，所以 $f(2)=3$.

(后面过程中多次用到这一推理，原因不再赘述)

$f(6)=3f(2)=9, f(9)=3f(3)=18$

$f(7)=12, f(8)=15$

$f(24)=3f(8)=45, f(27)=3f(9)=54$

$f(25)=48, f(26)=51$

$f(72)=3f(24)=135, f(75)=3f(25)=144$

$f(73)=138, f(74)=141$

$f(222)=3f(74)=423, f(225)=3f(75)=432$

$f(223)=426, f(224)=429$

$f(672)=3f(224)=1287, f(675)=3f(225)=1296$

$f(673)=1290, f(674)=1293$

$f(2022)=3f(674)=3879$

注：

昨天发了之后，经过申强提醒，才想起来自己忘写这题的三进制做法了。

事实上，这个数列为三进制下以 2 开头或以 0 结尾的所有数. 即三进制下的：

2、10、20、21、22、100、110、120、200、201、202、210、211、212、220、221、222、$\cdots$

只需验证以下结论成立即可：

$(1)f(3n)=3f(n)$;

$(2)f(3n+1)=2f(n)+f(n+1)$;

$(3)f(3n+2)=f(n)+2f(n+1)$.

1. 从等差数列 2，5，8，11，$\cdots$ 中抽取 k 个数，使得它们的倒数和为 1，求 k 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

陈题，之前上课时给四年级的学生讲过.

设 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=1$，其中 $x_i\equiv 2\pmod 3$.

将上式两边同时乘以 $x_1x_2\cdots x_n$，等式左边模 3 和 $n\cdot 2^{n-1}$ 同余，右边模 3 和 2^n 同余.

于是 $2^n\equiv n\cdot 2^{n-1}\pmod 3$，即 $n\equiv 2\pmod 3$.

$n=2$ 或 5 时，

$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{3041}{3080}<1$

于是 $n \geq 8$，下面给出 $n = 8$ 的构造：

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{7}{40} \\ =& \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} \\ =& \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + (\frac{1}{11} + \frac{1}{110}) \\ & + \frac{1}{20} + (\frac{1}{41} + \frac{1}{1640}) \end{aligned}$$

1. (1) 证明：对任意无理数 ω，存在无数个有理数 $\frac{p}{q}$ 使得 $|\omega - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

   (2) 证明：对无理数 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和任意的整数 p 和 q，都存在 $c > 1$ 使得 $|\omega - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{cq^2}$.

本题即为 Dirichlet 逼近定理的推论，可以参考《哈代数论》第 11 章用有理数逼近无理数.

第 (1) 问可以利用抽屉原理证明，参见 11.3 节 Dirichlet 的一个论证方法.

第 (2) 问为 11.4 节逼近的阶的定理 188.