一道初联代数题的推广

2021-04-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_aef3d6eec7fbedd5

题目 1 已知互不相等的实数 a，b，c 满足

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=t$$

则 $t=$_____.

(2012 年全国初中数学联赛)

分析这题没什么好说的，代入消元后结合 a，b，c 互不相等的条件就可以求出 t 了．代入过程中注意整体考虑可以减少一些计算量.

解答（PDF 中已展开）

解答由 $a+\frac{1}{b}=t$ 得 $b=\frac{1}{t-a}$.

代入 $b+\frac{1}{c}=t$，得

$$\frac{1}{t-a}+\frac{1}{c}=t$$

整理得:

$$ct^2-(ac+1)t+(a-c)=0$$

又由 $c+\frac{1}{a}=t$，可得 $ac+1=at$.

代入上式得:

$$ct^2-at^2+(a-c)=0$$

即

$$(c-a)(t^2-1)=0$$

又由于 $c\neq a$，于是 $t^2-1=0$，即

$$t=\pm 1$$

并且 $b=\frac{1}{1-a}$，$c=\frac{a-1}{a}$ 时，$t=1$；$b=-\frac{1}{1+a}$，$c=-\frac{a+1}{a}$ 时，$t=-1$.

故答案为：± 1.

值得一提的是，由本题条件还可以得到 $abc=\pm1$ 这一结论.

题目 2 已知互不相等的实数 a，b，c 满足

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$$

求证：$abc=\pm1$.

解答（PDF 中已展开）

分析利用题目 1 的结果不难得到. 考虑到轮换的结构，我们还有下面的证法.

证明由 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}$ 可得：

$$a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}$$

同理有

$$b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ca}$$

及

$$c-a=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$$

三式相乘即证.

在一些地方可以见到上面两题的四元推广，本质做法基本一样. 但题目 1 的复杂程度会大幅提升，而题目 2 基本没有改变. 于是想到将题目 1 推广为 n 元形式.

题目 3 正整数 $n\geq2$，互不相等的非零实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足：

$$a_1+\frac{1}{a_2}=a_2+\frac{1}{a_3}=\cdots=a_n+\frac{1}{a_1}=t$$

求实数 t 的值.

解答（PDF 中已展开）

分析这本质是一个数列问题. 建立 a_{k+1} 和 a_k 的递推式（含 t），显而易见，这是一个分式线性递推数列. 本题即要求使得该数列为周期数列，且最小周期为 n 的实数 t.

分式线性递推数列的周期性判断有比较复杂的方法，在此不再赘述. 可以参见知乎——如何通过递推公式的特征方程求周期数列的周期?

在本文中，我们可以发现

$n=2$ 时，$t=0=\pm 2\cos\dfrac{\pi}{2}$；

$n=3$ 时，$t=\pm 1=\pm 2\cos\dfrac{\pi}{3}$；

$n=4$ 时，$t=\pm\sqrt{2}=\pm 2\cos\dfrac{\pi}{4}$.

想到使用与余弦有关的工具进行处理（第二切比雪夫多项式）.

解答对于任意非零实数 a_1，定义 $r_0(x)=a_1$，$r_k(x)=2x-\dfrac{1}{r_{k-1}(x)}(k\geq 1)$.

设 $U_k(x)$ 为第二切比雪夫多项式，其满足 $U_{-1}(x)=0$，$U_0(x)=1$，$k\geq 1$ 时，

$$U_k(x)=2xU_{k-1}(x)-U_{k-2}(x)$$

下面用数学归纳法证明：$k\geq 1$ 时，有

$$r_k(x)=a_1+\frac{\left(2a_1x-a_1^2-1\right)U_{k-1}(x)}{a_1U_{k-1}x-U_{k-2}x}$$

（1）$k=1$ 时，结论显然成立；

（2）假设结论在 k 时成立，那么在 $k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
r_{k+1}(x)=&2x-\frac{1}{r_k(x)}\\
=&2x-\frac{1}{a_1+\dfrac{\left(2a_1x-a_1^2-1\right)U_{k-1}(x)}{a_1U_{k-1}x-U_{k-2}x}}\\
=&2x-\frac{a_1U_{k-1}(x)-U_{k-2}(x)}{a_1U_k(x)-U_{k-1}(x)}\\
=&a_1+\frac{(2x-a_1)\left(a_1U_k(x)-U_{k-1}(x)\right)-a_1U_{k-1}(x)+U_{k-2}(x)}{a_1U_k(x)-U_{k-1}(x)}\\
=&a_1+\frac{(2a_1x-a_1^2-1)U_k(x)}{a_1U_k(x)-U_{k-1}(x)}
\end{aligned}$$

于是结论在 $k+1$ 时也成立.

设 $t=2x$，即

$$a_1+\frac{1}{a_2}=a_2+\frac{1}{a_3}=\cdots=a_n+\frac{1}{a_1}=2x$$

于是

$$\begin{aligned}
&a_n=2x-\frac{1}{a_1}=r_1(x)\\
\Longrightarrow&a_{n-1}=2x-\frac{1}{a_n}=r_2(x)\\
\Longrightarrow&\cdots
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow a_1 = 2x - \frac{1}{a_2} = r_n(x)$$

即

$$a_1 = a_1 + \frac{\left(2a_1x - a_1^2 - 1\right) U_{n-1}(x)}{a_1U_{n-1}x - U_{n-2}x}$$

由 $a_k \neq a_{k+1}$ 知，$2a_1x - a_1^2 - 1 \neq 0$.

只能有 $U_{n-1}(x) = 0$. 而我们知道

$$U_{n-1}(x) = 2^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x - \cos \frac{i\pi}{n})$$

于是 $t = 2x = 2\cos \dfrac{i\pi}{n}$，其中正整数 i 满足 $1 \leq i \leq n-1$，且 $\gcd(i, n) = 1$（保证不会存在更小的周期）.

事实上，上述过程展示了 $a_{n+1} = t - \dfrac{1}{a_n}$ 这类分式线性递推数列为周期数列的另一种处理方式.