2023 年泰国在线数学奥林匹克

2023-02-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_af26cba4a8e9d6f6

第一天

1. 设 n 为正整数，高师傅有 n 种不同口味的冰激凌，每种口味有一个大杯装和一个小杯装. 他把 $2n$ 个冰激凌杯摆成两行，每行的 n 个冰激淋杯在同一个托盘上. 高师傅希望托盘是彩色的，所以他对冰激凌杯作出如下安排：

- 每行包含所有口味的冰激凌；
- 每列有大小不同的冰激凌杯.

在上述条件下，求高师傅的排法总数.

1. 设 $P(x)$ 为实系数多项式. 求证 $x^3P(x)+1$ 的根不全为实数.
2. 设 a 和 n 为正整数，且满足 a 和 $n!$ 的最大公约数为 1. 求证：$n!$ 整除 $a^{n!}-1$.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 和 D_1 均在线段 BC 上，且满足 $BD=CD_1$. 作点 E 使得 $EC\perp BC$，$ED\perp AC$. 作点 F 使得 $FB\perp BC$，$FD\perp AB$. 求证：$EF\perp AD_1$.
4. 对每个正整数 k，设 $d(k)$ 为 k 的正约数个数，$\sigma(k)$ 为 k 的所有正约数之和. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}_+\to\mathbb{N}_+$，使得对任意正整数 n，都有

$$f(d(n+1))=d(f(n)+1),$$
$$f(\sigma(n+1))=\sigma(f(n)+1).$$

第二天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，作点 X 使 $BX=BA$，且 X 和 C 位于直线 AB 的同侧. 作点 Y 使 $CY=CA$，且 Y 和 B 位于直线 AC 的异侧. 若 $\triangle BAX$ 和 $\triangle CAY$ 相似，证明：$\triangle AXY$ 的圆心位于 $\triangle ABC$ 的外接圆上.
2. 设正实数列 a_0，a_1，$\cdots$ 满足对任意 $n\geq 0$，都有

$$a_{n+1}\leq\frac{2023a_n}{a_na_{n+1}+2023},$$

求证：$a_{2023}<1$ 或 $a_{2024}<1$.

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$. 设点 M 为 BC 的中点，点 E 为点 B 在 AC 上的垂足. 点 C' 为点 C 关于直线 AM 的对称点. BC 上异于点 C 的一点 D 满足 $AD = AC$. 求证：点 B 为 $\triangle DEC'$ 的内心.

4. 求所有正整数列 a_1，a_2，$\cdots$，使得对任意正整数 n，都有

$$(n^2+1)a_n = n(a_{n^2}+1).$$

1. 设 n 为正偶数，Alice 和 Bob 进行以下游戏. 在游戏开始前，Alice 选取一个由 m 个整数组成的集合 S，并将它告诉 Bob. 然后从 Bob 开始，两人轮流进行操作，选择一个未被选择过的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，然后将 v_i 赋值为 0 或 1. 当 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 的值均被确定下来时，游戏结束，计算出 $E = v_1 \cdot 2^0 + v_2 \cdot 2^1 + \cdots + v_n \cdot 2^{n-1}$ 的值.
   求 m 的最小值，使得无论 Bob 如何操作，Alice 总能保证 $E \in S$.