2023 年俄罗斯数学奥林匹克不等式的解答

2023-04-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_af892886b05b47d2

2023 年俄罗斯数学奥林匹克十年级组第八题如下：

给定实数 $a\in(0,1)$. 今知正数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 满足条件 $x_0+x_1+\cdots+x_n=n+a$ 和 $\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=n+\dfrac{1}{a}$. 试求表达式 $x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2$ 的最小可能值.

本题和基于柯西不等式的一种代换方法一文中的不等式十分相似. 事实上，本题可以用几乎一样的方法进行处理，即先用柯西不等式确定每个变量的范围，然后使用局部不等式即可.

解答（PDF 中已展开）

答案：

最小值为 $n+a^2$，当且仅当 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)=(a,1,1,\cdots,1)$ 或其轮换时，等号成立.

证明：

由条件知：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=n+a-a_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=n+\frac{1}{a}-\frac{1}{a_0}$$

由柯西不等式知：

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2\\ \Longleftrightarrow\ &(n+a-a_0)\left(n+\frac{1}{a}-\frac{1}{a_0}\right)\geq n^2\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{na+1}{aa_0}(a_0-a)\left(a_0-\frac{n+a}{na+1}\right)\leq 0\end{aligned}$$

由 $(na+1)-(n+a)=(n-1)(a-1)\leq 0$ 知 $\dfrac{n+a}{na+1}\geq 1>a$，于是

$$a\leq a_0\leq\frac{n+a}{na+1}$$

同理，对任意 $0\leq i\leq n$，都有

$$a\leq a_i\leq\frac{n+a}{na+1}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(a_i - a)(a_i - 1)^2 \geq 0 \\
\iff &a_i^3 - (a+2)a_i^2 + (2a+1)a_i - a \geq 0 \\
\iff &a_i^2 \geq (a+2)a_i - (2a+1) + \frac{a}{a_i}
\end{aligned}
$$

对上式从 0 到 n 求和得:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \\
\geq &(a+2)\sum_{i=0}^{n} a_i - (2a+1)(n+1) + a\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i} \\
= &(a+2)(n+a) - (2a+1)(n+1) + a\left(n + \frac{1}{a}\right) \\
= &n + a^2
\end{aligned}
$$

证毕.