# 四面体中的钝二面角个数

2021-05-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_af8d6147f73280ad

**题目**（2008 年安徽省预赛）四面体的 6 个二面角中钝角个数最多为 _____.

首先容易猜测出答案为 3，并给出一个构造如下：

考虑正三棱锥 $P-ABC$，当点 $P$ 足够接近平面 $ABC$ 时，二面角 $A-PB-C$、$B-PC-A$，$C-PA-B$ 均为钝角.

---

下面证明：钝二面角的个数不可能为 4. 为方便叙述，我们用 $\theta_{AB}$ 表示以 $AB$ 为棱的二面角.

假设四面体中存在四个钝二面角，考虑剩余两个二面角的位置关系. 有如下两种情形：

1. 两个二面角有公共面；
2. 两个二面角无公共面.

---

我们证明情形 1 是不可能的.

在情形 1 中，必有一个面不属于剩余两个二面角，于是这个面与四面体的其余三个面所构成的二面角均为钝角. 不妨设平面 $ABC$ 和剩余 3 个面所构成的角均为钝角.

我们有如下基本结论：

**结论 1** 若 $M-PQ-N$ 为钝二面角，则 $M$ 在平面 $PQN$ 内的射影与 $N$ 位于 $PQ$ 异侧.

由这一结论，结合 $D-AB-C$，$D-BC-A$，$D-CA-B$ 均为钝二面角，可知，点 $D$ 在平面 $ABC$ 上的射影 $D'$ 与点 $C$ 位于 $AB$ 异侧，与点 $A$ 位于 $BC$ 异侧，与点 $B$ 位于 $CA$ 异侧，而平面 $ABC$ 上不存在这样的点 $D'$. 因此证明了情形 1 是不可能的.

---

考虑情形 2，不妨设剩余两个二面角为 $\theta_{AB}$ 和 $\theta_{CD}$.

取四面体 $ABCD$ 的内切球球心 $I$，内切球在四个面上的切点 $P_1$，$P_2$，$P_3$，$P_4$. 则 $\overrightarrow{IP_1}$、$\overrightarrow{IP_2}$、$\overrightarrow{IP_3}$、$\overrightarrow{IP_4}$ 为四面体 $ABCD$ 四个面的法向量，且均指向四面体外部. 于是 $\overrightarrow{IP_i}$、$\overrightarrow{IP_j}$ 为 $P_i$、$P_j$ 所在四面体两面 $\alpha_i$、$\alpha_j$ 所成二面角的补角.

我们有如下结论：

**结论 2** $I$ 在四面体 $P_1P_2P_3P_4$ 内部.

此结论看似显然，但证明需要花费一些功夫，在此不再赘述.

由结论 2，在 $\overrightarrow{IP_1}$、$\overrightarrow{IP_2}$、$\overrightarrow{IP_3}$、$\overrightarrow{IP_4}$ 中，任意两个不共线，任意三个不共面.

于是存在唯一的正实数组 $k_1$，$k_2$，$k_3$，$k_4$，使得

$$\sum_{i=1}^{4} k_i = 1,\ \sum_{i=1}^{4} k_i \cdot \overrightarrow{IP_i} = \overrightarrow{0}.$$

事实上，我们有 $k_i = \dfrac{V_{I-P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}}}{V_{P_1P_2P_3P_4}}$，这就是四面体中的 “奔驰定理”.

简记 $\overrightarrow{v_i} = k_i \cdot \overrightarrow{IP_i}$，于是

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{v_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} |\overrightarrow{v_i}|^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le 4} \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j}$$

由题意知，四个面所成的二面角中，有四个钝角，且剩余两个角无公共面. 于是在 $\sum\limits_{1\le i<j\le 4} \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j}$ 的六项中，四项为正，且剩余两项的四个向量无相同下标，不妨设为 $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ 和 $\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_4}$. 则

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{i=1}^{4} |\overrightarrow{v_i}|^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le 4} \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} \\
>& \sum_{i=1}^{4} |\overrightarrow{v_i}|^2 + 2\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_4} \\
>& \sum_{i=1}^{4} |\overrightarrow{v_i}|^2 - 2|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}| - 2|\overrightarrow{v_3}||\overrightarrow{v_4}| \\
=& (|\overrightarrow{v_1}| - |\overrightarrow{v_2}|)^2 + (|\overrightarrow{v_3}| - |\overrightarrow{v_4}|)^2 \\
\ge& 0
\end{aligned}$$

矛盾！于是钝二面角的个数不可能为 4.

---

也可用三面角的余弦定理进行证明.

**三面角的余弦定理**在四面体 $ABCD$ 中，记号同上. 有如下两个结论：

**结论 3**（由平面角计算二面角）

$$\cos\theta_{AD} = \frac{\cos\angle BDC - \cos\angle CDA\cos\angle ADB}{\sin\angle CDA\sin\angle ADB}$$

**结论 4**（由二面角计算平面角）

$$\cos\angle ABC = \frac{\cos\theta_{BD} + \cos\theta_{AB}\cos\theta_{BC}}{\sin\theta_{AB}\sin\theta_{BC}}$$

同方法一，我们只考虑 $\theta_{AB}$ 和 $\theta_{CD}$ 以外的四个二面角为钝角的情形.

则

$$\cos\theta_{BD} + \cos\theta_{AB}\cos\theta_{BC} < 0$$

$$\cos\theta_{AD} + \cos\theta_{AB}\cos\theta_{AC} < 0$$

由上面的公式 2:

$$\cos\angle ABC < 0,\ \ \cos\angle BAC < 0$$

即 $\angle ABC$ 和 $\angle BAC$ 均为钝角，这显然不可能.