2024 年比荷卢数学竞赛

2024-04-29 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b016e6a46ed81f56

2024 年比荷卢数学竞赛

程国根 译

1. (1) 实数 $a_0, a_1, \cdots, a_{2024}$ 满足：$|a_{i+1} - a_i| \le 1$，$0 \le i \le 2023$. 求

$$a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_{2023}a_{2024}$$

的最小值.

(2) 是否存在实数 C，使得

$$a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - a_3a_4 + \cdots + a_{2022}a_{2023} - a_{2023}a_{2024} \ge C$$

对任意满足：$|a_{i+1} - a_i| \le 1$，$0 \le i \le 2023$ 的实数 $a_0, a_1, \cdots, a_{2024}$ 都成立.

2. 设 n 为正整数. 在坐标网格中，一条从 $(0,0)$ 到 $(2n,2n)$ 的**路径**包含 $4n$ 段连续的单位步子 $(0,1)$ 或 $(1,0)$. 求证：将以 $(0,0)$，$(2n,0)$，$(2n,2n)$，$(0,2n)$ 四点为顶点的正方形分成面积均为偶数的两部分的不同路径的总条数为

$$\frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}.$$

3. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外接圆为 Ω，$|AC| \ne |BC|$. $\angle CAB$ 的内角平分线和边 BC 交于点 D，$\angle ABC$ 和 $\angle BCA$ 的外角平分线分别和 Ω 交于点 E 和点 F. 设直线 AE 和 FI 交于点 G，$\triangle BDI$ 的外接圆为 Γ. 求证：点 E 在 Γ 上当且仅当点 G 在 Γ 上.

4. 对每个正整数 n，记 $\mathrm{rad}(n)$ 为 n 的所有不同素因子之积. 求证：存在整数 $a, b > 1$，满足 $\gcd(a,b) = 1$，且

$$\mathrm{rad}(ab(a+b)) < \frac{a+b}{2024^{2024}}.$$

例如：$\mathrm{rad}(20) = \mathrm{rad}(2^2 \cdot 5) = 2 \cdot 5 = 10$，$\mathrm{rad}(18) = \mathrm{rad}(2 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 = 6$.

2024 年比荷卢数学竞赛

程国根 译

1.

1. 实数 $a_{0},a_{1},\cdots,a_{2024}$满足：$| a_{i+1}-a_{i}|\le 1$，$0\le i\le 2023$. 求$a_{0}a_{1}+a_{1}a_{2}+\cdots+a_{2023}a_{2024}$的最小值.
2. 是否存在实数 C，使得 $a_{0}a_{1}-a_{1}a_{2}+a_{2}a_{3}-a_{3}a_{4}+\cdots+a_{2022}a_{2023}-a_{2023}a_{2024}\ge C$对任意满足：$| a_{i+1}-a_{i}|\le 1$，$0\le i\le 2023$的实数 $a_{0},a_{1},\cdots,a_{2024}$都成立.

2. 设 n为正整数. 在坐标网格中，一条从 $(0,0)$到 $(2n,2n)$的**路径**包含 $4n$段连续的单位步子 $(0,1)$或 $(1,0)$. 求证：平分以 $(0,0)$，$(2n,0)$，$(2n,2n)$，$(0,2n)$四点为顶点的正方形面积的不同路径的总条数为 $$\frac{\binom{4n}{2n}+\binom{2n}{n}}{2}.$$

3. 设 $\triangle ABC$的内心为 I，外接圆为 Ω，$|AC|\neq|BC|$. $\angle CAB$的内角平分线和边 BC交于点 D，$\angle ABC$和 $\angle BCA$的外角平分线分别和 Ω交于点 E和点 F. 设直线 AE和 FI交于点 G，$\triangle BDI$的外接圆为 Γ. 求证：点 E在 Γ上当且仅当点 G在 Γ上.

4. 对每个正整数 n，记 $\mathrm{rad}(n)$为 n的所有不同素因子之积. 求证：存在整数 $a,b>1$，满足 $\gcd(a,b)=1$，且 $$\mathrm{rad}(ab(a+b))<\frac{a+b}{2024^{2024}}.$$ **例如：$\mathrm{rad}(20)=\mathrm{rad}(2^{2}\cdot 5)=2\cdot 5=10$，$\mathrm{rad}(18)=\mathrm{rad}(2\cdot 3^{2})=2\cdot 3=6$.**

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年比荷卢数学竞赛}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item
↪ 实数$a_{0},a_{1},\cdots,a_{2024}$满足：$|a_{i+1}-a_{i}|\le 1$，$0\le i\le 2023$.
↪ 求$$a_{0}a_{1}+a_{1}a_{2}+\cdots+a_{2023}a_{2024}$$的最小值. \item 是否存在实数$C$，
↪ 使得$$a_{0}a_{1}-a_{1}a_{2}+a_{2}a_{3}-a_{3}a_{4}+\cdots+a_{2022}a_{2023}-a_{2023}a_{2024}\ge C$$对任意满足：
↪ $|a_{i+1}-a_{i}|\le 1$，$0\le i\le 2023$的实数$a_{0},a_{1},\cdots,a_{2024}$都成立. \end{enumerate}\vfill\ex 设$n$为正整数.
↪ 在坐标网格中，一条从$(0,0)$到$(2n,2n)$的\textbf{路径}包含$4n$段连续的单位步子$(0,1)$或$(1,0)$. 求证：平分以$(0,0)$，
↪ $(2n,0)$，$(2n,2n)$，
↪ $(0,2n)$四点为顶点的正方形面积的不同路径的总条数为$$\frac{\binom{4n}{2n}+\binom{2n}{n}}{2}.$$\vfill\ex 设$\triangle
↪ ABC$的内心为$I$，外接圆为$\Omega$，$|AC|\neq |BC|$. $\angle CAB$的内角平分线和边$BC$交于点$D$，$\angle
↪ ABC$和$\angle BCA$的外角平分线分别和$\Omega$交于点$E$和点$F$. 设直线$AE$和$FI$交于点$G$，$\triangle
↪ BDI$的外接圆为$\Gamma$. 求证：点$E$在$\Gamma$上当且仅当点$G$在$\Gamma$上. \vfill\ex 对每个正整数$n$，
↪ 记$\mathrm{rad}(n)$为$n$的所有不同素因子之积. 求证：存在整数$a,b>1$，满足$\gcd(a,b)=1$，
↪ 且$$\mathrm{rad}(ab(a+b))<\frac{a+b}{2024^{2024}}.$$\textbf{例如：$\mathrm{rad}(20)=\mathrm{rad}(2^{2}\cdot 5)=2\cdot
↪ 5=10$，$\mathrm{rad}(18)=\mathrm{rad}(2\cdot 3^{2})=2\cdot 3=6$. }\vfill
```