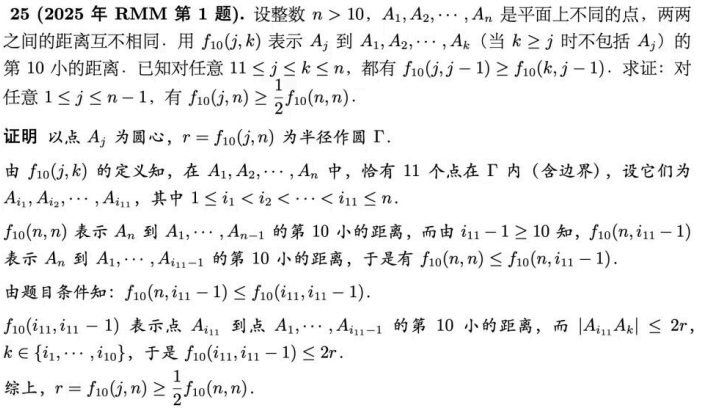
2025 年罗马尼亚大师杯第 1 题解答

2025-02-14　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b0c1da4e5c70fd11

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



25 (2025 年 RMM 第 1 题). 设整数 $n>10$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是平面上不同的点，两两之间的距离互不相同．用 $f_{10}(j,k)$ 表示 A_j 到 $A_1,A_2,\cdots,A_k$（当 $k\geq j$ 时不包括 A_j）的第 10 小的距离．已知对任意 $11\leq j\leq k\leq n$，都有 $f_{10}(j,j-1)\geq f_{10}(k,j-1)$．求证：对任意 $1\leq j\leq n-1$，有 $f_{10}(j,n)\geq\frac{1}{2}f_{10}(n,n)$．

证明 以点 A_j 为圆心，$r=f_{10}(j,n)$ 为半径作圆 Γ．

由 $f_{10}(j,k)$ 的定义知，在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，恰有 11 个点在 Γ 内（含边界），设它们为 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_{11}}$，其中 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{11}\leq n$．

$f_{10}(n,n)$ 表示 A_n 到 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 的第 10 小的距离，而由 $i_{11}-1\geq 10$ 知，$f_{10}(n,i_{11}-1)$ 表示 A_n 到 $A_1,\cdots,A_{i_{11}-1}$ 的第 10 小的距离，于是有 $f_{10}(n,n)\leq f_{10}(n,i_{11}-1)$．

由题目条件知：$f_{10}(n,i_{11}-1)\leq f_{10}(i_{11},i_{11}-1)$．

$f_{10}(i_{11},i_{11}-1)$ 表示点 $A_{i_{11}}$ 到点 $A_1,\cdots,A_{i_{11}-1}$ 的第 10 小的距离，而 $|A_{i_{11}}A_k|\leq 2r$，$k\in\{i_1,\cdots,i_{10}\}$，于是 $f_{10}(i_{11},i_{11}-1)\leq 2r$．

综上，$r=f_{10}(j,n)\geq\frac{1}{2}f_{10}(n,n)$．

主要难度在理解概念，有点类似于 2012 年的联赛第 3 题。

设 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是平面上的 $n+1$ 个不同的点，其两两间的距离的最小值为 d. 求证：

$$|P_0P_1|\cdot|P_0P_2|\cdot\cdots\cdot|P_0P_n|>\left(\frac{d}{3}\right)^n\sqrt{(n+1)!}.$$