一个代数恒等式的命制背景

2023-12-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b2936c6b123e6ca7

一个代数恒等式的命制背景

匈牙利 KöMaL2023 年十月征解题 B5335 如下：

1. 正实数 x,y,z 乘积为 1，求表达式

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

的所有可能值.

解 题目难度不大，直接展开合并就能得到答案为 4. 但有老师问道：这样的题是如何编出的？

观察式子结构，容易联想到如下恒等式：

若 $A+B+C=\pi$，则

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

考虑到 $x+\dfrac{1}{x}\in[2,+\infty)$，与 $\cos A\in[-1,1]$ 差距很大，我们使用双曲余弦函数.

$$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}=\cos \mathrm{i}\theta$$

设 $A=\mathrm{i}\alpha$，$B=\mathrm{i}\beta$，$C=\mathrm{i}\gamma$，则恒等式变为：

若 $\alpha+\beta+\gamma=-\mathrm{i}\pi$，则

$$\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2}=1$$

设 $x=e^{\alpha}$，$y=e^{\beta}$，$z=-e^{\gamma}$，则 $xyz=-e^{\alpha+\beta+\gamma}=-e^{-\mathrm{i}\pi}=1$，上式变为

$$\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)^2+\left(\frac{y+\frac{1}{y}}{2}\right)^2+\left(-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2+2\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(\frac{y+\frac{1}{y}}{2}\right)\left(-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)=1$$

即

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4$$

这就是本题的命制背景.

一个代数恒等式的命制背景

匈牙利 KöMaL2023 年十月征解题 B5335 如下：

1. 正实数 x,y,z乘积为 1，求表达式 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)$$ 的所有可能值.

题目难度不大，直接展开合并就能得到答案为 4. 但有老师问道：这样的题是如何编出的？观察式子结构，容易联想到如下恒等式：若 $A+B+C=\pi$，则 $$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$ 考虑到 $x+\dfrac{1}{x}\in[2,+\infty)$，与 $\cos A\in[-1,1]$差距很大，我们使用双曲余弦函数. $$\cosh\theta=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}=$$

\cos \mathrm{i}\theta$$ 设 $A=\mathrm{i}\alpha$，$B=\mathrm{i}\beta$，$C=\mathrm{i}\gamma$，则恒等式变为：若 $\alpha+\beta+\gamma=-\mathrm{i}\pi$，则 $$\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2}=1$$ 设 $x=e^{\alpha}$，$y=e^{\beta}$，$z=-e^{\gamma}$，则 $xyz=-e^{\alpha+\beta+\gamma}=-e^{-\mathrm{i}\pi}=1$，上式变为 $$\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)^2+\left(\frac{y+\frac{1}{y}}{2}\right)^2+\left(-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2+2\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(\frac{y+\frac{1}{y}}{2}\right)\left(-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)=1$$ 即 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4$$ 这就是本题的命制背景.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{一个代数恒等式的命制背景}
匈牙利 KöMaL2023 年十月征解题 B5335 如下：
\ex 正实数 $x,y,z$ 乘积为 $1$，求表达式
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\le
ft(z+\frac{1}{z}\right)$$
的所有可能值.
\begin{solution} 题目难度不大，直接展开合并就能得到答案为 $4$. 但有老师问道：这样的题是如何编出的？
观察式子结构，容易联想到如下恒等式：
若 $A+B+C=\pi$，则
$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$
考虑到 $x+\dfrac{1}{x}\in[2,+\infty)$，与 $\cos A\in[-1,1]$ 差距很大，我们使用双曲余弦函数.
$$\cosh\theta=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}=\cos \mathrm{i}\theta$$
设 $A=\mathrm{i}\alpha$，$B=\mathrm{i}\beta$，$C=\mathrm{i}\gamma$，则恒等式变为：
若 $\alpha+\beta+\gamma=-\mathrm{i}\pi$，则
$$\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2
}\right)^2+2\cdot\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2}=1
$$
设 $x=e^{\alpha}$，$y=e^{\beta}$，$z=-e^{\gamma}$，则 $xyz=-e^{\alpha+\beta+\gamma}=-e^{-\mathrm{i}\pi}=1$，上式变为
$$\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)^2+\left(\frac{y+\frac{1}{y}}{2}\right)^2+\left(-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2+2\left(\frac{x+\frac{1}
{x}}{2}\right)\left(\frac{y+\frac{1}{y}}{2}\right)\left(-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)=1$$
即$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\
left(z+\frac{1}{z}\right)=4$$
这就是本题的命制背景. \end{solution}
```