2024 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

2024-09-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b37e5d763240d725

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 设 $d(n)$ 为正整数 n 的正约数个数．求证：对任意正整数组 (a,b)，都有

$$d(a)+d(b)\le d(\gcd(a,b))+d(\operatorname{lcm}(a,b)),$$

并求出所有使等号成立的正整数组 (a,b)．

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，M,N 分别为边 AB,AC 的中点．点 D 在线段 BC 上，且 $DB<DC$．设 P 为 DM 和 AC 的交点，Q 为 DN 和 AB 的交点．设 $\triangle APQ$ 和 $\triangle AMN$ 的外接圆交于点 R（异于点 A），点 K 为 AR 的中点．求证：$\angle MKN=2\angle BAC$．

3. 设 O 为平面上的一个定点。在平面上有 2024 个红点、2024 个黄点和 2024 个绿点，其中任意三点不共线，且所有点都异于点 O．已知对于任意两种颜色，它们的所有点的凸包都包含点 O（可以在内部和边界）。如果一个红色点、一个黄色点和一个绿色点组成的三角形的内部或边界包含点 O，则称这个三角形为玻利维亚三角形。求最大的正整数 k，使得无论这些点的位置如何，总有至少 k 个玻利维亚三角形。

2024 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

程国根　译

第二天

4. 将平面上的一些点按照如下规则染为红色：若点 P,Q 为红色，点 X 满足 $\triangle PQX$ 的三个内角为 $30^\circ,60^\circ,90^\circ$ 的一个排列，则将点 X 也染为红色．若点 A,B,C 均为红色，求证：$\triangle ABC$ 的重心也为红色．

5. 设整数 $n\geq 2$，给定正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（可以相同），满足 $\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$．起初，在黑板上写有正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和正整数 x．每一次操作中，可以从黑板上的 $n+1$ 个数中选择两个数 $a>b$，将它们擦去并写上数 $a-b,2b$．求正整数 x 的所有可能值（用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 表示），使得可以通过有限次操作，让黑板上的数全部相同．

6. 求所有由正整数构成的无限集 A，满足条件：若 $a,b\in A$，且 $a\geq b$，则 $\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor\in A$．