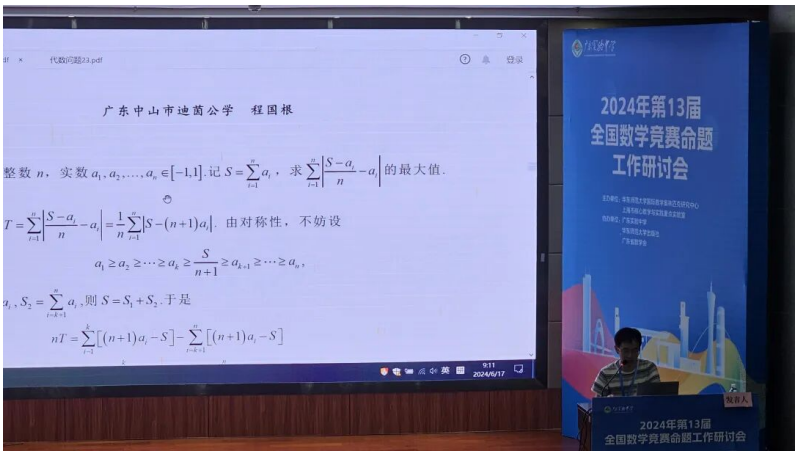
本届命题工作研讨会上我分享的题目

2024-06-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b3ae787e9b474dd4



题目 1：

给定正整数 n，实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [-1, 1]$. 记 $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$，求 $\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{S - a_i}{n} - a_i \right|$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

记 $T = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{S - a_i}{n} - a_i \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |S - (n+1)a_i|$. 由对称性，不妨设

$$a_1, a_2, \cdots, a_k \geq \frac{S}{n+1} \quad a_{k+1}, \cdots, a_n \leq \frac{S}{n+1}$$

并记 $S_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i$，$S_2 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i$，则 $S = S_1 + S_2$. 于是

$$\begin{aligned} nT =& \sum_{i=1}^{k} [(n+1)a_i - S] - \sum_{i=k+1}^{n} [(n+1)a_i - S] \\ =& (n+1) \sum_{i=1}^{k} a_i - kS + (n+1) \sum_{i=k+1}^{n} a_i + (n-k)S \\ =& (n+1)S_1 - k(S_1 + S_2) - (n+1)S_2 + (n-k)(S_1 + S_2) \\ =& (2n - 2k + 1)S_1 - (2k+1)S_2 \end{aligned}$$

固定 k，则 $S_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i \leq k$，$S_2 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i \geq -(n-k)$，于是

$$\begin{aligned} nT =& (2n - 2k + 1)S_1 - (2k+1)S_2 \\ \leq& (2n - 2k + 1)k + (2k+1)(n-k) \\ =& -4k^2 + 4nk + n \\ =& -(2k - n)^2 + n^2 + n \end{aligned}$$

(1) 当 n 为偶数时，在 $k = \frac{n}{2}$ 时，T 取得最大值 $n+1$，取等：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，一半为 -1，另一半为 1；

(2) 当 n 为奇数时，在 $k=\dfrac{n\pm1}{2}$ 时，T 取得最大值 $n+1-\dfrac{1}{n}$，取等：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，$\dfrac{n+1}{2}$ 个为 -1，$\dfrac{n-1}{2}$ 个为 1.

注 1：

(1) 在变形时，我们把前 k 项之和与后 $n-k$ 项之和记为 S_1 与 S_2，并分别求出它们的最大值与最小值（取决于前面系数的正负），这样的放缩是容易取得等号的. 但如果记前 k 项之和为 S_1，将 T 表示为 S_1 与 S 的线性组合，则无法进行后续放缩.

(2) 本题是如下问题的简单版本：

题目 2：

给定正整数 n，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[-1,1]$. 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\in[-1,1]$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_i-S^2\right|\leq n-S$.

解答（PDF 中已展开）

证明：

不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_k\leq S^2$，$a_{k+1},\cdots,a_n\geq S^2$. 记 $S_1=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$，$S_2=\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_i$，则 $S=S_1+S_2$. 于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left|a_i-S^2\right|\\=&\sum_{i=1}^{k}(S^2-a_i)+\sum_{i=k+1}^{n}(a_i-S^2)\\=&(2k-n)S^2-S_1+S_2\end{aligned}$$

注意这里的 S 本身有范围 $[-1,1]$，且是二次，若换成 S_1+S_2 会比较复杂. 我们选择消去 S_1 或 S_2. 当然也要注意到 $S_1\in[-k,k]$，$S_2\in[k-n,n-k]$.

在操作过程中，会发现：后续放缩会与 S^2 系数 $2k-n$ 的正负有关系，于是我们进行分类讨论.

(1) $k<\dfrac{n}{2}$ 时，$2k-n<0$，于是 $2k-n\leq-1$，$2k\leq n-1$，因此有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left|a_i-S^2\right|\\=&(2k-n)S^2-S_1+S_2\\=&(2k-n)S^2+S-2S_1\\\leq&(2k-n)S^2+S+2k\\\leq&-S^2+S+n-1\\=&-(S-1)^2+n-S\\\leq&n-S\end{aligned}$$

(2) $k\geq\dfrac{n}{2}$ 时，有 $2k-n\geq0$，结合 $S\in[-1,1]$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}|a_i-S^2| \\
=&(2k-n)S^2-S_1+S_2 \\
=&(2k-n)S^2-S+2S_2 \\
\leq&(2k-n)S^2-S+2(n-k) \\
=&(2k-n)(S^2-1)+n-S \\
\leq&n-S
\end{aligned}$$

综上即证.

注 2:

本题为 2024 年 4 月第 15 届 XMO 代数题中的引理，这里对字母做了一些修改，使之成为一道完整题目．在讲完本题后，我把次数从二次改为了一次，并对系数略作调整，得到的题目难度降低不少，适合学生作为练习。

这就是本届命题工作研讨会上我所分享的题目。