2022 年中国台湾数学奥林匹克

2022-02-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b3beb1381fd9f534

1. 设正整数 x，y，z 满足 $\gcd(x,y,z)=1$．若

$$x \mid yz(x+y+z),$$

$$y \mid xz(x+y+z),$$

$$z \mid xy(x+y+z),$$

且

$$x+y+z \mid xyz,$$

求证：$xyz(x+y+z)$ 为完全平方数．

2. 本题选自 2021 年 IMO 预选题，将于 2022 年 IMO 举办之后公开

3. 求所有函数 f，g：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，满足对任意实数 a，b，c，d，都有

$$|f(a,b)-f(c,d)|+|g(a,b)-g(c,d)|=|a-c|+|b-d|$$

4. 两个婴儿 A 和 B 用 2022 瓶牛奶进行一个游戏．每个奶瓶的最大容量为 200ml，最初每个奶瓶中装有 30ml 的牛奶．从 A 开始，两人轮流执行以下操作之一：
(1) 选择一瓶至少 100ml 的牛奶，喝掉一半；
(2) 选择两瓶少于 100ml 的牛奶，将其中一瓶中的牛奶倒入另一个奶瓶中，并将空瓶丢掉．
无法进行任何操作者输掉游戏．问：谁有必胜策略？
（命题人注：本题的另一个版本是，最初有 1011 个奶瓶中装有 90ml 的牛奶，另外 1011 个奶瓶中装有 150ml 的牛奶．两个问题的解决方案截然不同．
因此，一个有趣的问题是：在给定任意初始状态的情况下，确定具有获胜策略的人．这似乎是一个非常困难的问题，我们会对朝着这个方向取得的任何进展感兴趣．）

5. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，J 为点 A 所对的旁心．设 X，Y 为 $\triangle ACJ$ 外接圆上的两点，且满足 $JX=JY<JC$．XY 上一点 P 满足 PB 和 $\triangle ABC$ 的外接圆相切．$\triangle BXY$ 的外接圆上一点 Q 满足 BQ 和 AC 平行．求证：$\angle BAP=\angle QAC$．