2022 年清华大学大中衔接试题及个人思考

2022-11-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b4c5afb8b39bd6c0

1. 求所有的整数 x，使得 $x^8 \equiv 16 \pmod{61}$.
2. 是否存在首一整系数多项式 $f(x)$,$g(x)$，满足 $f(x)g(x)-(x^5-x+1)$ 的系数均为 5 的倍数?
3. 至少进行多少次相邻两数位置互换的操作，才能将 $(1,2,\cdots,100)$ 变为 $(2,4,\cdots,100,99,97,\cdots,1)$?
4. 对凸 n 边形 C，定义其对角线的赋值为该对角线所在直线两边 C 的边数之差的绝对值. C 的一个三角剖分的权为该剖分中对角线的赋值的最小值. 求所有三角剖分的权的最大值.
5. 设复数 z_1,z_2,$\cdots$,z_n 的模长都不超过 1. 求证:

$$\left|n-\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \geq \left|1-\prod_{k=1}^{n} z_k\right|.$$

1. 设 p 是质数，$f(x)$ 是整系数多项式，满足 $f(1)$,$f(2)$,$\cdots$,$f(p)$ 模 p 的余数有 m 种，其中 $1<m<p$. 求证: $\deg f \geq \dfrac{p-1}{p-m}$.

没有动笔，简单谈谈这几道题:（如果有错误，请指出）

解答（PDF 中已展开）

1. 答案是 10，12，49，51.（也就只有这题能口算一下了）

$61 \mid x^8-16=(x^4+4)(x^2+2)(x^2-2)$

容易知道 ± 2 为模 61 的二次非剩余，只能有
$61 \mid x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
即 $61 \mid ((x+1)^2+1)((x-1)^2+1)$
(一个经典的因式分解)

接下来就不难看出答案了.

1. 也就是考查 x^5-x+1 在有限域 $\mathbb{F}_5$ 的可约性.

可见: https://zhuanlan.zhihu.com/p/486528229

(题外话: 想到了好石的“经典”文章《一元五次方程实例代数解》)

1. 把 $(2,4,\cdots,100,99,97,\cdots,1)$ 当作新的序，考虑 $(1,2,\cdots,100)$ 在这个序下的逆序数以及逆序列.

（在编程中应该是个入门问题）

1. 归纳就完了.

2. 陈题，AoPS 上有，原题为 2020 年 Putnam B5.

原题：

> 对 $j \in \{1,2,3,4\}$，设 z_j 为模长为 1 的复数，且 $z_j \neq 1$. 求证：
> $3 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_1z_2z_3z_4 \neq 0$

原题比较简单，AoPS 上有人进行了推广，就是本题.

推广及解答：

Feb 25, 2021, 6:51 AM • 2 PM #8

(missed a tiny detail last time)
Ok we are going to prove that if $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ and $|z_i| \leq 1$ then :

$$|n - z_1 - z_2 - ... - z_n| \geq |1 - z_1z_2...z_n|$$

and equality iff all but one of the z_i are equal to 1.

Proof: For $n = 2$ a direct computation shows that
$(2 - z_1 - z_2)(2 - \bar{z_1} - \bar{z_2}) \geq (1 - z_1z_2)(1 - \bar{z_1}\bar{z_2})$
$4 - 2(z_1 + z_2) - 2(\bar{z_1} + \bar{z_2}) + |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 - 1 + z_1z_2 + \bar{z_1}\bar{z_2} - |z_1|^2|z_2|^2 \geq 0$
$(2 - z_1 - \bar{z_1})(2 - z_2 - \bar{z_2}) \geq (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$
The above holds trivially and equality iff one of $z_{1,2} = 1$

In the general case note that $\frac{1 - z_1z_2...z_n}{n - z_1 - z_2 - ... - z_n}$ is a holomorphic function in the unit disk wrt to any z_i and due to the maximum modulus principle the maximum of $|\frac{1 - z_1z_2...z_n}{n - z_1 - z_2 - ... - z_n}|$ is achieved somewhere on the boundary for every z_i namely to prove the above we need only consider the case $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$
We now show case $2n$ assuming n is true.
Consider $|z_1| = |z_2| = ... = |z_{2n}| = 1$ and for $k = 1, ..., n$ choose $|w_k| = 1$:
$z_{2k-1}z_{2k} = w_k^2$ and then $z_{2k-1} + z_{2k} = 2c_kw_k$ for $c_k \in [-1, 1]$
the inequaltiy becomes

$$|2n - 2c_1w_1 - ... - 2c_nw_n| \geq |1 - w_1^2...w_n^2|$$

But $|n - c_1w_1 - ... - c_nw_n| \geq |1 - c_1...c_nw_1...w_n|$ so it remains to show that:
First set $c_1c_2...c_n = c \in [-1, 1]$ and $w_1...w_n = w$ and $|w| = 1$

$$2|1 - cw| \geq |1 - w^2|$$

$4(1 - cw)(1 - c\bar{w}) \geq (1 - w^2)(1 - \bar{w}^2)$
$4 + 4c^2 - 4c(w + \bar{w}) - 2 + w^2 + \bar{w}^2 \geq 0$
$(2c - w - \bar{w})^2 \geq 0$ true.
Therefore we inductively prove the inequality for $n = 2^k$ the equality case is also easily proved (all but one $c_kw_k = 1$) and you can deduce any lower case by setting some $z_i = 1$ thus we have proved the statement for any n.

1. 陈题，为 2019 年国际大都市数学奥林匹克（IOM）第 9 题的左半边.

Let p be a prime and let $f(x)$ be a polynomial of degree d with integer coefficients. Assume that the numbers $f(1), f(2), \ldots, f(p)$ leave exactly k distinct remainders when divided by p, and $1 < k < p$. Prove that

$$\frac{p-1}{d} \leq k - 1 \leq (p-1)\left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

有人觉得和 2019 年罗马尼亚大师赛（RMM）的最后一题有联系，不过那题我不会，也只能看出来形式上比较相似，就不多做评论了.

求所有的整数对 (c,d)，c,d 均大于 1，且满足：
对任意一个 d 次首一整系数多项式 Q，以及任意一个质数 $p>c(2c+1)$，均存在一个元素个数不超过 $\dfrac{2c-1}{2c+1}p$ 的整数集合 S，使得集合
$\bigcup\limits_{s\in S}\{s,Q(s),Q(Q(s)),Q(Q(Q(s))),\cdots\}$
含有模 p 的完全剩余系.

个人倒觉得这题和 1997 年 IMO 预选题中的一道题形式也挺像的，难度则是另一个极端.

设 f 为整系数多项式, p 为素数, 满足 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 对任意正整数 k, $f(k)\equiv 0$ 或 $1\pmod p$. 求证：$\deg f\geq p-1$.