# Mathematical Reflections 2021 年第四期征解题

2021-07-30 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b4db1227a0feb5a7

## 初级组 (Junior Preblems)

**J559.** 设

$$a_n = 1 - \frac{2n^2}{1+\sqrt{1+4n^4}}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

求证：$\sqrt{a_1} + 2\sqrt{a_2} + \cdots + 20\sqrt{a_{20}}$ 为整数.

**J560.** 设 $a$，$b$，$c$ 为正实数. 求证：

$$\frac{2}{a^2} + \frac{5}{b^2} + \frac{45}{c^2} > \frac{16}{(a+b)^2} + \frac{24}{(b+c)^2} + \frac{48}{(c+a)^2}.$$

**J561.** 求下述方程组的非零实数解：

$$x - \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = y - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = z - \frac{1}{z} + \frac{2}{x} = 0.$$

**J562.** 已知 $D$，$E$，$F$ 分别为 $\triangle ABC$ 三边 $BC$，$CA$，$AB$ 上的点，且 $AD$，$BE$，$CF$ 交于一点 $X$. 假设 $\frac{BD}{DC}$，$\frac{CE}{EA}$，$\frac{AF}{FB}$ 的值均在区间 $\left[\frac{1}{5}, 5\right]$ 中，且

$$\frac{BD}{DC} + \frac{CE}{EA} + \frac{AF}{FB} = \frac{31}{5}.$$

求 $\frac{AX}{XD} + \frac{BX}{XE} + \frac{CX}{XF}$ 的值.

**J563.** 设实数 $a, b, c \geq 0$ 满足

$$ab + bc + ca = a + b + c > 0.$$

求证：

$$1 \leq \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \leq \frac{7}{5}.$$

**J564.** 求所有复数 $z$，满足对于任意实数 $a$ 和正整数 $n$，都有

$$(\cos a + z \sin a)^n = \cos na + z \sin na.$$

## 高级组 (Senior Problems)

**S559.** 设正实数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n$. 求

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2a_2^2}+\cdots+\frac{1}{na_n^n}$$

的最小值.

**S560.** 非负实数 $a$，$b$，$c$ 满足 $a+b+c=2$. 求证:

$$\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}+\frac{c}{a^2+ab+b^2}+8\geq\frac{10}{ab+bc+ca}.$$

**S561.** 设 $p$ 为素数. 求下述方程的正整数解:

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)=p^2.$$

**S562.** 设 $a$，$b$，$c$，$d$ 为非负实数. 求证:

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^3+9(abc+bcd+cda+dab)\\ \geq&4(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd).\end{aligned}$$

**S563.** 设 $a$，$b$，$c$ 为不同的正实数. 求证以下三式至少有一个不等于 4:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2(1-b^4);\left(b+\frac{1}{b}\right)^2(1-c^4);\left(c+\frac{1}{c}\right)^2(1-a^4)$$

**S564.** 设 $x$，$y$，$z$ 为非负实数. 求证:

$$\begin{aligned}&\frac{x^3+y^3+z^3+3xyz}{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)}+\frac{5}{4}\\ \geq&(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right].\end{aligned}$$

## 大学组 (Undergraduate Problems)

**U559.** 计算:

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx.$$

**U560.** 设 1，1，2，3，5，8，$\cdots$ 为斐波那契数列. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{\cot 1}{\cot\frac{1}{2}}+\frac{\cot\frac{1}{2}}{\cot\frac{1}{3}}+\frac{\cot\frac{1}{3}}{\cot\frac{1}{5}}+\frac{\cot\frac{1}{5}}{\cot\frac{1}{8}}+\cdots\right).$$

**译者注：本题原文有误，似乎应为**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cot\dfrac{1}{F_{k-1}}}{\cot\dfrac{1}{F_k}}$$

**U561.** 斐波那契数列 $F_n$ 定义如下：

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, F_0=0, F_1=1.$$

求证：

$$2F_nF_{n+1}^5-2F_n^5F_{n+1}=F_n^6+F_{n+1}^6-F_{n+1}^2-F_n^2.$$

**U562.** 已知 $ABCD$ 为矩形．动点 $P$ 和 $Q$ 分别在边 $AB$ 和 $BC$ 上，且满足 $\angle PDQ=45^\circ$．求 $\triangle PDQ$ 垂心的轨迹.

**U563.** 求所有的实系数多项式 $P(x)$，满足对于任意实数 $x$，都有

$$\left(P(x^2)+x\right)\left(P(x^3)-x^2\right)=P(x^5)+x.$$

**U564.** 计算：

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\sum_{k=1}^{4n}\arctan\frac{k^4+3k^2-1}{k^4-k^2+7}\right).$$

## 奥林匹克问题 (Olympiad Problems)

**O559.** 设实数 $x$，$y$，$z\in(-1,1)$ 满足

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+x+y+z=0.$$

求 $\dfrac{z}{x+y}$ 的最小值.

**O560.** 求证：存在无穷多个三元整数组 $(a,b,c)$，满足 $ab+bc+ca=1$，且 $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ 为完全平方数.

**O561.** 设 $ABC$ 为三角形．求证：

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{1+\cos^2B+\cos^2C}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

**O562.** 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意实数 $x$，$y$，都有

$$x^2f(y)+f(y^2f(x))=xyf(x+y).$$

**O563.** 求证：在任意 $\triangle ABC$ 中，有

$$\sqrt{\frac{m_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{m_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{m_c}{h_c}}+\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geq 5.$$

**O564.** 设整数 $n\geq 3$. 对任意实数列

$$-1=x_1<x_2<\cdots<x_n=1$$

以及每个 $k=1,2,\cdots,n$，定义

$$D_k(x_2,\cdots,x_{n-1})=\left|\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)\right|$$

并记 $r_n=\max\limits_{x_2,\cdots,x_{n-1}}\min\limits_{k}D_k(x_2,\cdots,x_{n-1})$.

假设数列

$$-1=x_1<x_2<\cdots<x_n=1$$

中取得了 $r_n$. 求证:

$$D_2(a_2,\cdots,a_{n-1})=\cdots=D_{n-1}(a_2,\cdots,a_{n-1}).$$