九省联考第 14 题的最简单做法

2024-01-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b4e856dd02f988f2

题目：

以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数. 设 $0<a<b<c<1$，已知 $b\geq 2a$ 或 $a+b\leq 1$，则 $\max\{b-a,c-b,1-c\}$ 的最小值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

解答：

(1) $b\geq 2a$ 时，有 $b-a\geq a$，于是

$$\begin{aligned}&\max\{b-a,c-b,1-c\}\\=&\max\{a,b-a,c-b,1-c\}\\\geq&\frac{a+(b-a)+(c-b)+(1-c)}{4}\\=&\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2) $a+b\leq 1$ 时，

$$\begin{aligned}&\max\{b-a,c-b,1-c\}\\\geq&\frac{(b-a)+2(c-b)+2(1-c)}{5}\\=&\frac{2-(a+b)}{5}\\\geq&\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$a=\dfrac{2}{5}$，$b=\dfrac{3}{5}$，$c=\dfrac{4}{5}$ 时，等号成立.

于是最小值为 $\dfrac{1}{5}$.

感兴趣的读者可以思考系数是怎么来的.