“如图”能带来怎样的有效信息？

2023-07-25　原文链接

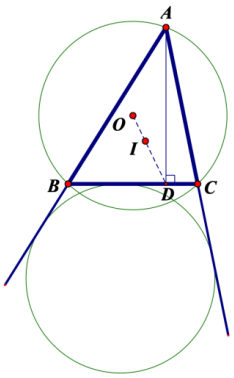
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b557be2b0cc4b6b3

这是一个从高中学竞赛时我就开始思考的问题：

平面几何题干中的“如图”二字能给我们带来怎样的有效信息？

问题起源是这道 1998 年的全国高中数学联赛题：

1998．如图，O、I分别是△ABC的外心和内心，AD是BC边上的高，I在线段OD上。
求证：△ABC的外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径。（1998年全国高中联赛）



题目难度不大，用三角法能够很快解决。

但是细心的老师和同学就会发现：如果只看题干，在 AB=AC 时，O、I 都在高 AD 上，如果角 A 小于 60 度，则 I 在线段 OD 上，也满足题目要求。而此时的结论并不正确，外接圆半径和旁切圆半径并无等量关系。

于是本题结论的成立是依赖于“O、I 不在线段 AD 上”这个由图给出的条件的。

事实上，用三角法来做本题，最后也会得到 cos B=cos C 或 cos A=cos B+cos C 的结论，而很多人则会自动排除前者，来完成证明。

我想大多数人的看法是：这道联赛题的“如图”是没有问题的，因为的确能看出来信息。

那么大家思考一下初中时做的这样一类几何题：如图给了一个示例，图中满足题意的动点在线段上，问满足题意的动点共有几个？最后答案中还包含了动点在延长线上的情形。

此时的“如图”就不能看出信息来了吗?

思考下面几个问题：

1. 如果“如图”能告诉我们点不在直线上，那能否告诉我们点不在延长线上（而在线段上)?
2. 如果“如图”能告诉我们点不在直线上，那能否告诉我们点在直线上（三点共线)?
3. 如果“如图”能告诉我们点在直线上（三点共线)，那能否告诉我们两线垂直、平行?

如果上面的答案都为“是”的话，那以后做几何题是否只需要说如图，结论成立了?

否则，回到开始的问题：

平面几何题干中的“如图”二字能给我们带来怎样的有效信息？

最后表明我的观点：

“如图”不能给我们带来任何有效信息，例如一开始的联赛题，应明确加上“O、I 不在 AD 上”，或“AB 不等于 AC”这样的条件，否则就是一道错题。数学的表达应是严谨而准确的，应在题干中严格描述出所有信息，而不是用“如图”来辅助描述。