2022 年中国台湾 IMOC——代数、几何组

2022-09-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b5bc8bea3ed79472

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试. 从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代. 下面就是 2022 年中国夏令营的 IMOC 练习题.

代数组

1. 正实数 x，y，z 满足 $x+y+z=3$，求证：

$$\sum_{cyc} y^2z^2 < 3+\sum_{cyc} yz$$

2. 给定正整数 $n\geq 2$，实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$. 求

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_n-a_1|$$

的最大值.

3. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足：

$$xy(f(x+y)-f(x)-f(y))=2f(xy)$$

4. 记所有从 $\mathbb{N}_+$ 到 $\mathbb{N}_+$ 的双射组成的集合为 $\mathcal{B}$. 求所有映射 $\mathbf{F}\colon \mathcal{B}\to\mathbb{R}$，满足：

$$(\mathbf{F}(p)+\mathbf{F}(q))^2=\mathbf{F}(p\circ p)+\mathbf{F}(p\circ q)+\mathbf{F}(q\circ p)+\mathbf{F}(q\circ q)$$

5. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足：

$$\begin{aligned}&\left(x\left(f(x)-\frac{f(y)+f(z)}{2}\right)+y\left(f(y)-\frac{f(z)+f(x)}{2}\right)+z\left(f(z)-\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)\right)f(x+y+z)\\=&f(x^3)+f(y^3)+f(z^3)-3f(xyz)\end{aligned}$$

1. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足：

$$f(x+y)f(f(x))=f(1+yf(x))$$

几何组

1. $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O 和 H. $XACH$ 为平行四边形. 若 $OH//BC$, 求证: OX 和 AB 的交点在 AH 的中垂线上.

2. $\triangle ABC$ 的内心为 I. 内切圆在 BC, CA, AB 上的切点分别为点 D, E, F. 点 R 在 BC 上, 满足 $\angle CIR = 90^\circ$. 设 $\triangle CER$ 的 C-旁心为点 L. 求证: L、D、F 三点共线当且仅当 B、E、A、R 四点共圆.

3. $\triangle ABC$ 为锐角三角形. R 为 BC 上一点. 在直线 AR 上取点 P、Q, 使得 B、P、C、Q 四点共圆. 设 BP、CP、BQ、CQ 和 $\triangle ABC$ 的另一个交点分别为 P_B、P_C、Q_B、Q_C. 设 $\triangle PP_BP_C$ 和 $\triangle QQ_BQ_C$ 的外心分别为点 O_P 和 O_Q. 求证: A、O_P、O_Q、R 四点共圆.

4. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Ω. 过 A 作 BC 的平行线和 Ω 再次交于点 D. 以 B 为圆心, BD 为半径作圆 ω_b, ω_b 和 AB 再次交于点 E; 以 C 为圆心, CD 为半径作圆 ω_c, ω_c 和 AC 再次交于点 F. 设 $\triangle AEF$ 的外接圆和 Ω 的交点为 K (异于点 A). ω_b 和 KB 再次交于点 P, ω_c 和 KC 再次交于点 Q. $\triangle DPQ$ 的外心为点 O, 求证: K、O、D 三点共线.

5. P 为 $\triangle ABC$ 内一点. BP 交 AC 于点 E, CP 交 AB 于点 F. AP 和 $\triangle ABC$ 的外接圆再次交于点 X. $\triangle ABC$ 的外接圆和 $\triangle AEF$ 的外接圆再次交于点 S. BC 上一点 T 满足 $PT//EF$. 求证: $\triangle STX$ 的外接圆过 BC 的中点.

6. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点. E 在 AC 上, F 在 AB 上, 使得 A、D、E、F 四点共圆. M 为 BC 中点. 若 DM、BE、CF 三线共点, 求证: BE 和 CF 的交点在圆 $ADEF$ 上, 或 $EF//BC$.