加拿大 CRUX 杂志问题 4691-4700

2021-12-17　原文链接

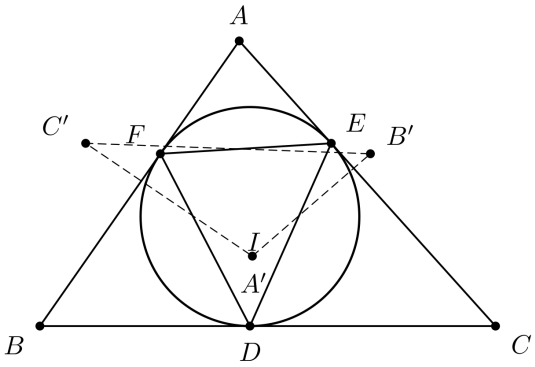
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b6ad3d73e817f3e0

1. $\triangle ABC$ 内接于圆 Γ，U_1，U_2，U_3 为 Γ 上异于 A，B，C 的三点. 设 σ_i 为 U_i 关于 $\triangle ABC$ 的西姆松线（$i=1,2,3$），σ_i 和 σ_j 交于点 V_k（$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$）. 已知 $\triangle V_1V_2V_3$ 和 $\triangle U_1U_2U_3$ 全等，求证：$\triangle V_1V_2V_3$ 和 $\triangle U_1U_2U_3$ 关于某点中心对称，并求出此对称中心.

2. 非零实数 a，b，c 满足 $a^3+b^3+c^3=0$. 求
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
的最小值和此时 a，b，c 的取值.

3. 对任意正整数 n，求证：
$$\sum_{k=1}^{n}\sec^4\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{8n(n+1)\left(n^2+n+1\right)}{3}.$$

1. $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 BC，CA，AB 切于点 D，E，F. A'，B'，C' 分别为 A，B，C 关于 EF，DF，DE 的对称点. 求证：$\triangle DEF$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的面积相等.



译者注：本题为陈嘉昊老师供题，可见《平面几何每日一题（四）解答》.

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，外接圆半径为 R. 在 $\triangle ABC$ 外部作等边三角形 $\triangle A_1BC$，$\triangle B_1CA$，$\triangle C_1AB$. 设 K，L，M 依次为三个等边三角形的中心. 求证：

$$S_{\triangle ALM}+S_{\triangle BMK}+S_{\triangle CKL}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

2. 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)^n}dx$$

1. 设 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足 $f(1)=1$，$f(2)=a$，其中 $a\in\mathbb{N}$. 且对任意正整数 $n\geq3$，$f(n)$ 为与 $f(n-1)$ 互素，且不等于 $f(1)$，$f(2)$，$\cdots$，$f(n-1)$ 的最小正整数. 求证：每个正整数均在 $f(n)$ 中出现.

译者注：本题与 2018 年高联二试第四题类似，该题如下：

> 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：a_1 是任意正整数，对整数 $n\geq1$，a_{n+1} 是与 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 互素，且不等于 a_1，$\cdots$，a_n 的最小正整数. 证明：每个正整数均在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

1. 正实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(1+x_i)<\ln2.$$

2. $\triangle ABC$ 为不等边三角形，D 和 E 在三角形外部，F 为点 A 到 BC 的垂足. 若 $\angle EAC=\angle ECA=\angle ABC$，$\angle DAB=\angle DBA=\angle BCA$，且 BE，CD，AF 交于一点 X，求证：$AX=XF$.

3. 设 $ABCD$ 为单位正方形，M 和 N 分别在边 BC 和 CD 上，且满足 $\angle MAN=45^\circ$. 求证：

$$MN+BM\cdot DN=1.$$

1.

$$MN+BM\cdot DN=1.$$