2022 年韩国数学奥林匹克（初级组）

2022-11-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b6b3b5c9d27a61b6

第一天

1. $\triangle ABC$ 的内切圆和边 AB、BC 分别切于点 D、E，I 为 $\triangle ABC$ 的内心．求证：AI 和 DE 的交点在以 AC 为直径的圆上．

2. 对正整数 n（≥ 3），求出同时满足以下两个条件的有序整数组的个数：
(1) 对任意 $1 \leq i \leq n$，$1 \leq a_i \leq i$；
(2) 对任意 $1 \leq i < j < k \leq n$，若 $a_i = a_j$，则 $a_j \geq a_k$．

3. 给定奇素数 p，定义 $f(n)$ 为 d 模 p 的余数，其中 d 为 n 的所有约数中，不为 p 的倍数的最大者．例如：$p = 5$ 时，$f(35) = 2$，$f(75) = 3$．整数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ 定义如下：
(1)$a_1 = 1$；
(2) 对任意正整数 n，$a_{n+1} = a_n + (-1)^{f(n)+1}$．
求所有整数 m，使得存在无穷多个正整数 k，满足 $m = a_k$．

4. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意正整数 x 和 y，$\dfrac{f(x+y)-f(x)}{f(y)}$ 为一个不超过 2022^{2022} 的正整数．

第二天

1. 实数列 a_1，a_2，$\cdots$ 定义如下：$a_1 = 2$，$a_2 = 11$，对任意正整数 n，$2a_{n+2} = 3a_n + \sqrt{5(a_n^2 + a_{n+1}^2)}$．求证：对任意正整数 n，a_n 均为有理数．

2. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$．D 为边 AC 上异于 A、C 的一点，圆 Ω 和 BD 切于点 E，和 AC 切于点 C．设 AE 和 Ω 的另一个交点为 F，AC 和 $\triangle ABF$ 外接圆的另一个交点为 G．求证：D、E、F、G 四点共圆．

3. n 张卡片上不重复地标有从 1 到 n 的数字．将这些卡片放在 n 个盒子里，起初每个盒子里恰有一张卡片．按照以下操作方法将所有卡片放入同一个盒子中：
选择一个整数 k（$1 \leq k \leq n$），将标有 k 的卡片放入另一个盒子（不能是空盒子）中，使得该盒子中的卡片编号之和为 k 的倍数．
求所有正整数 n，使得存在这样的操作方法，能够将所有的卡片放入同一个盒子中．

4. 求所有有理数组 (x, y)，满足

$$xy^2 = x^2 + 2x - 3.$$