四省联考第 16 题分析

2023-02-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b7a8e32924bd2775

昨天的四省联考题目在网上引起了热议。引用韩涛老师在朋友圈发的一段话进行总结:

> 刚考完的高三四省联考，哀鸿遍野。主要是这是教育部考试中心直接命题，看来命题的确朝着我之前预测的方向进行。这套试卷最大的看点是第 16 题和最后的压轴题。组合极值问题第一次堂而皇之进入了这种级别的高考模拟卷中，而这在课本中是未曾体现的。最后一道大题很多学生读都读不懂。去年新高考其实就看出端倪是，今年必将更甚之。高考难度上和竞赛并驾齐驱是常态化。

最后一题的背景为椭圆曲线上的群结构，但只要理解了题目，难度并不算太大（在考场上是另一回事）。

而第 16 题考察的则是著名的熄灯问题（Lights out），这里做个简单分析（高考生即可读懂）。

16. 右图为一个开关阵列，每个开关只有“开”和“关”两种状态，按其中一个开关1次，将导致自身和所有相邻的开关改变状态. 例如，按 $(2,2)$ 将导致 $(1,2)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(3,2)$ 改变状态. 如果要求只改变 $(1,1)$ 的状态，则需按开关的最少次数为_____.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

首先要明确的一点是，本题中的开关和“灯”并不是一一对应的关系。每盏灯由 3 至 5 个开关控制，取决于灯的三种位置（角、边、中心）。

其次要知道，改变按动开关的先后顺序是不影响最后灯的状态的，因为只需要对每盏灯分别计更改状态的次数。

最后，灯的状态只与控制它的开关按动总次数的奇偶性有关（2 次按动即恢复原状）。

于是，为了使按开关的总次数尽可能少，每个开关均只按动 0 或 1 次。

为方便书写，下面用 a、b、c、$\cdots$、i 表示每个开关的按动次数（从左到右，从上到下）。

考察 $(1,1)$ 处的灯，只有它最终改变了状态，于是控制它的开关总按动次数为奇数，在模 2 的意义下，我们有

$$a+b+d=1\text{——}(1)$$

类似地，有

$$a+b+c+e=0\text{——}(2)$$

$$b+c+f=0\text{——}(3)$$

$$a+d+e+g=0\text{——}(4)$$

$$b+d+e+f+h=0——(5)$$

$$c+e+f+i=0——(6)$$

$$d+g+h=0——(7)$$

$$e+g+h+i=0——(8)$$

$$f+h+i=0——(9)$$

注意到，本文式子中的等号表示的只是奇偶性相同.

下面我们来解这个方程组：

对于一般情况，比如将 3×3 表格改为 $m\times n$ 表格，或者最终不止 $(1,1)$ 一个方格改变了状态，我们可以同样列出方程组，然后用高斯消元法解出每个未知数.

但本题中的 0 比较多，所以我们可以比较简单地解出方程组.

由 $(1)+(3)+(8)$ 得：

$$a+2b+c+d+e+f+g+h+i=1$$

由 $(1)+(6)+(7)$ 得：

$$a+b+c+2d+e+f+g+h+i=1$$

由 $(3)+(4)+(9)$ 得：

$$a+b+c+d+e+2f+g+h+i=1$$

由 $(2)+(7)+(9)$ 得：

$$a+b+c+d+e+f+g+2h+i=0$$

于是

$$b=d=f+1=h+1$$

代入 (1) 得 $a=1$;

代入 (3) 得 $c=1$;

代入 (5) 得 $e=0$;

代入 (7) 得 $g=1$;

代入 (9) 得 $i=0$.

将上述值代入 (2)、(4)、(6)、(8) 得 $b=d=0$，$f=h=1$.

于是总按动次数至少为 5，需要按动 $(1,1)$、$(1,3)$、$(2,3)$、$(3,1)$、$(3,2)$ 这五个开关.

感兴趣的读者可以仿照上题做一下类似情况，也可以搜索 Lights out 小游戏.