一道三元不等式简证

2023-07-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b7b364fabb56128b

这是后台读者问的一道题，睡前写一下.

实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$，求 $a+b+c-2abc$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

取 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$c=0$，得

$$a+b+c-2abc=\sqrt{2}.$$

下证：$a+b+c-2abc\le\sqrt{2}$，即

$$2-(a+b+c-2abc)^2\ge 0.$$

由 $2ab\le a^2+b^2\le a^2+b^2+c^2=1$，同理有 $2bc\le 1$，$2ca\le 1$.

于是

$$\begin{aligned}&2-(a+b+c-2abc)^2\\=&1+(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c-2abc)^2\\=&(1-2ab)(1-2bc)(1-2ca)+4a^2b^2c^2\\\ge&0\end{aligned}$$

综上，最大值为 $\sqrt{2}$.