2023 年 IMO 第一天试题解答

2023-07-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b848db501c6753d6

第 1 题

设 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$ 是合数 n 的全部正因数，若对任意 $1\le i\le k-2$，均有 $d_i\mid d_{i+1}+d_{i+2}$，求 n.

解答（PDF 中已展开）

解答：

容易验证 $n=p^{k-1}$（p 为素数）满足题意.

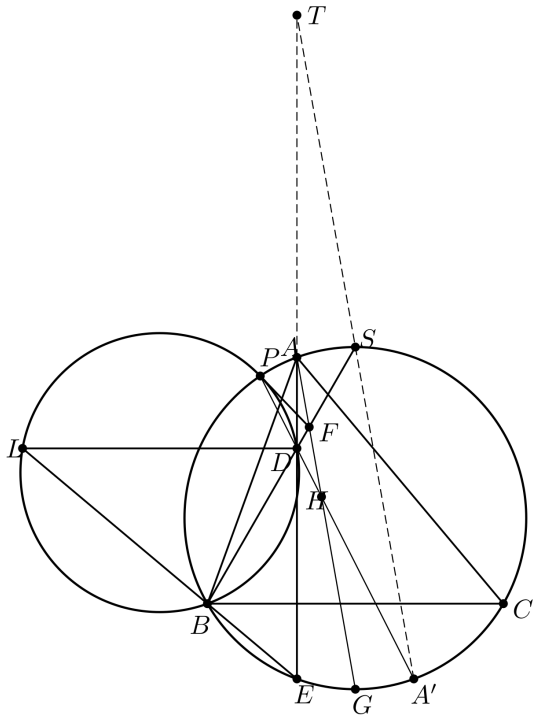
若 n 有至少 2 个不同的素因子，设最小的两个素因子为 $p<q$，则 n的正因数从小到大依次为 $1,p,\cdots,p^{t},q,\cdots$. < p=""><</q$，则 n的正因数从小到大依次为 $1,p,\cdots,p^{t},q,\cdots$. <>

有 $\dfrac{n}{q}\mid\dfrac{n}{p^t}+\dfrac{n}{p^{t-1}}$，即 $\dfrac{\dfrac{n}{p^t}+\dfrac{n}{p^{t-1}}}{\dfrac{n}{q}}=\dfrac{q(p+1)}{p^t}\in\mathbb{Z}$，由 $\gcd(p,q)=\gcd(p,p+1)=1$ 知矛盾.

所以满足题意的全体 $n=p^{k-1}$（p 为素数）.

第 2 题

如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，Ω 是外接圆，S 是弧 BAC 的中点. 过 A 作 BC 的垂线交 BS 于点 D、交 Ω 于点 E. 过 D 作 BC 的平行线交直线 BE 于点 L，设 $\triangle BDL$ 的外接圆 ω 与 Ω 交于另一点 P. 求证：ω 在 P 处的切线与直线 BS 的交点在 $\angle BAC$ 的平分线上.



解答（PDF 中已展开）

证明：

设 A' 为 A 的对径点，G 为南极点，则 A' 和 E 关于 SG 对称.

由 $\angle BPD = \angle BLD = \angle EBC = \angle BCA' = \angle BPA'$ 知，P, D, A' 三点共线.

设 $\angle BAC$ 的平分线 AG 交 PA' 于点 H，交 BD 于 F，只需证明：PF 为 ω 的切线.

延长 $EA, A'S$ 交于点 T，则 $\triangle TEA'$ 为直角三角形，且由 $SE = SA'$ 知 S 为斜边中点.

注意到 AA' 和 SG 均过圆心，故 $AG \parallel SA'$，因此 F 为 AH 中点，而 $\angle APH = \angle APA' = 90°$.

而 S, A', B, P 四点共圆，则由 $\angle BFH = \angle BSA' = \angle BPA' = \angle BPH$ 知 F, H, B, P 四点共圆.

于是 $\angle FPH = \angle FHP = \angle FBP = \angle DBP$，即 FP 为 ω 的切线，证毕.

第 3 题

给定整数 $k \geq 2$. 求所有的无穷正整数数列 $a_1, a_2, \cdots$，使得存在多项式

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中 $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ 是非负整数，满足

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

对任意正整数 n 成立.

解答（PDF 中已展开）

答案

首项为正整数，公差为非负整数的等差数列.

证明

(1)

由 $P(a_n)=a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$ 和 $P(a_{n+1})=a_{n+2}a_{n+3}\cdots a_{n+k+1}$ 知 $\dfrac{P(a_{n+1})}{P(a_n)}=\dfrac{a_{n+k+1}}{a_{n+1}}$.

因为 $P(x)$ 系数均非负，所以 $P(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增.

若存在 $n\in\mathbb{N}_+$，使得 $a_{n+1}<a_n$，即 $P(a_{n+1})<P(a_n)$，则 $a_{n+k+1}<a_{n+1}$.

必存在 $m\in\{n+1,n+2,\cdots,n+k\}$，使得 $a_{m+1}<a_m$. 取其中最大的一个（最后一次下降），则 $a_{n+1}>a_{m+1}$.

重复上述过程，又有 $t\in\{m+1,m+2,\cdots,m+k\}$，且 $a_{t+1}<a_t$，$a_{m+1}>a_{t+1}$.

于是有无穷多个 $n_1<n_2<\cdots$，满足 $a_{n_i+1}<a_{n_i}$，且 $a_{n_1}>a_{n_2}>\cdots$，经过有限项后必小于 0，与 a_{n_i} 为正整数矛盾!

于是 $\{a_n\}$ 不减.

(2)

若 $a_n=a_{n+1}$，则 $P(a_n)=P(a_{n+1})$，于是 $a_{n+1}=a_{n+k+1}$.

而 $a_{n+1}\le a_{n+2}\le\cdots\le a_{n+k+1}$，因此 $a_n=a_{n+1}=\cdots=a_{n+k+1}$.

$P(a_{n-1})=a_na_{n+1}\cdots a_{n+k-1}=a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}=P(a_n)$，故 $a_{n-1}=a_n$.

向前，向后分别递推得：$\{a_n\}$ 为常数列.

下设 $a_1<a_2<\cdots$.

(3)

取一个足够大的正整数 t，满足 $\mathrm{C}_k^r\cdot t^r\ge c_{k-r}$ 对 $1\le r\le k$ 恒成立，则

$$P(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+\cdots+c_1x+c_0\le x^k+\mathrm{C}_k^{k-1}tx^{k-1}+\cdots+\mathrm{C}_k^1t^{k-1}x+t^k=(x+t)^k$$

于是 $a_{n+1}^k\le a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}=P(a_n)\le(a_n+t)^k$，即 $a_{n+1}\le a_n+t$.

(4)

对固定的 n，有 $a_{n+k}-a_n\le kt$，设 $d_k=a_{n+k}-a_n\in\{1,2,\cdots,kt\}$，其中 $d_1<d_2<\cdots<d_k$，$(d_1,d_2,\cdots,d_k)$ 可能出现的状态至多有 $(kt)^k$ 种，于是存在一组重复出现无穷多次的 $(d_1,d_2,\cdots,d_k)$，对应的 n 设为 $n_1<n_2<\cdots$.

则 $P(a_n)=(a_n+d_1)(a_n+d_2)\cdots(a_n+d_k)$ 对无穷多个 a_n 成立，而 $P(x)$ 为多项式，必有 $P(x)=(x+d_1)(x+d_2)\cdots(x+d_k)$.

(5)

用数学归纳法证明 $d_m = md_1$ 对 $1 \le m \le k$ 成立.

$m = 1$ 时显然，假设结论对 $1, 2, \cdots, m-1$ 成立，则在 m 时，由

$$P(a_n + d_1) = P(a_{n+1}) = a_{n+2}a_{n+3}\cdots a_{n+k+1} = (a_n + d_2)\cdots(a_n + d_k)a_{n+k+1}$$

等式右边有因式 $a_n + d_m$，于是 $a_n + d_m \mid P(a_n + d_1)$ 对无穷多个 a_n 成立，因此 $x + d_m \mid P(x + d_1)$.

于是存在 $l \in \{1, 2, \cdots, k\}$，使得 $d_m = d_1 + d_l$.

若 $l \le m - 2$，则有 $d_1 + d_l = d_{l+1} \le d_{m-1} < d_m$，矛盾!

因此 $l = m - 1$，$d_m = d_1 + d_{m-1} = md_1$，由归纳法即证.

设 $d = d_1$，则 $P(x) = (x + d)(x + 2d)\cdots(x + kd)$.

(6)

取 (4) 中的 a_n（满足 $a_{n+1} = a_n + d$，$\cdots$，$a_{n+k} = a_n + kd$）. 则

$$P(a_{n+1}) = (a_{n+1} + d)(a_{n+1} + 2d)\cdots(a_{n+1} + kd) = (a_n + 2d)(a_n + 3d)\cdots(a_n + (k+1)d)$$

$$P(a_{n+1}) = a_{n+2}a_{n+3}\cdots a_{n+k+1} = (a_n + 2d)(a_n + 3d)\cdots(a_n + kd)a_{n+k+1}$$

于是 $a_{n+k+1} = a_n + (k+1)d$.

归纳知，从 a_n 开始为等差数列，公差为 d.

$$P(a_{n-1}) = a_n a_{n+1}\cdots a_{n+k-1} = a_n(a_n + d)\cdots(a_n + (k-1)d) = P(a_n - d)$$

由 $P(x)$ 单调性知 $a_{n-1} = a_n - d$.

向前归纳可得，$a_n = a_1 + (n-1)d$.

综上所述，满足题意的全体 $\{a_n\}$ 为首项为正整数，公差为非负整数的等差数列.