2022 年葡语国家数学奥林匹克

2022-11-05 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b8bed0782c1bab5f

第一天

1. 方程组

$$\begin{cases} a^4 - b^4 = c \\ b^4 - c^4 = a \\ c^4 - a^4 = b \end{cases}$$

有多少组实数解 (a, b, c)?

1. Anselmo 和 Claudio 在一个装有水果的盒子里玩游戏. 盒子里开始有 32 个水果, 从 Anselmo 开始，两人轮流从盒子里拿出水果. 每次能拿出 1、2、3 个水果，或拿走盒子中剩余水果的 $\frac{2}{3}$（只有盒子中所剩水果数为 3 的倍数时才可以选择）. 拿走最后一个水果的人获胜. 问：谁有必胜策略？要怎样才能保证获胜?

2. 正整数 x 和 y 满足 $x^{2022} + x + y^2$ 能被 xy 整除.
   (a) 求出一组满足题意的整数 x 和 y，且满足 $x > y$.
   (b) 证明：x 为完全平方数.

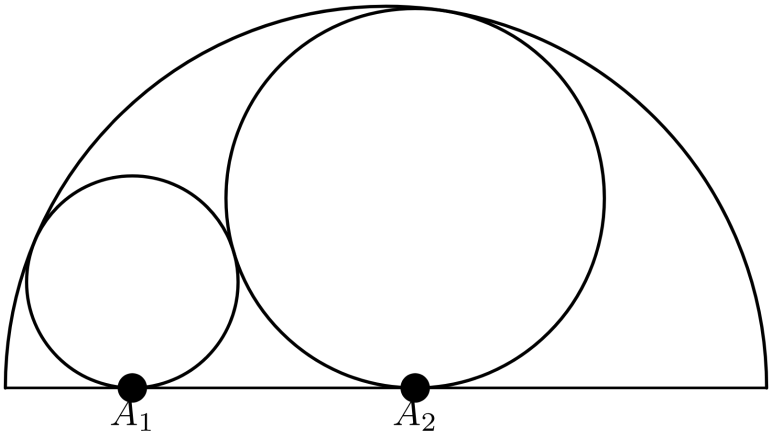
第二天

1. 方程

$$x + 4y - 343\sqrt{x} - 686\sqrt{y} + 4\sqrt{xy} + 2022 = 0$$

有多少组整数解?

1. 半径分别为 R_1、R_2 的两个圆外切. 此外，它们都内切于一个半径为 1 的半圆.（如图所示）



(a) 设两圆和半圆的直径切于 A_1、A_2 两点，求 $|A_1A_2|$.

(b) 求证：$R_1 + R_2 = 2\sqrt{R_1R_2}(\sqrt{2} - \sqrt{R_1R_2})$.

2. 一串项链上有 2024 颗珍珠，每颗均为黑、绿、黄三色之一. 每个时刻，按照如下规则改变每颗珍珠的颜色：

(1) 如果某颗珍珠边上的两颗珍珠颜色相同，则它的颜色变为这种相同的颜色；

(2) 如果某颗珍珠边上的两颗珍珠颜色不同，则它的颜色变为与它们均不同的第三种颜色.

(a) 如果起初一半的珍珠是黑色的，另一半是绿色的，是否存在某种颜色分布情况，使得最后所有珍珠都变为黄色?

(b) 如果起初 998 颗珍珠是黑色的，其余 1026 颗是绿色的，是否存在某种颜色分布情况，使得最后所有珍珠都变为黄色?