n 元不等式中的反证法：反设以后得到什么

2026-08-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b9ab44a800b290aa

大家还想看什么专题，可以留言，我根据情况结合手头已有资料进行整理。

反证法能否简化不等式，取决于结论的否定能否增加可用条件。竞赛题中常见的变化包括：从“任意”中抽出一个坏对象；把变量限制到便于比较的区间；由递推式固定相邻项的符号；把“无穷多次成立”改写成“从某项起全部失败”；把“存在一个指标”改写成“所有指标都失败”；把可能逃向无穷远的变量限制在有限范围。最后一种变化还能补上极值法所需的极值存在性。下面六题分别展示这些入口。

坏三元组：从“任意”到一个反例

2004 IMO 第 4 题

设 $n \geq 3$，正实数 $t_1, \ldots, t_n$ 满足

$n^2+1 > (t_1+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$.

证明任取三个 t_i, t_j, t_k 都能作为三角形的三边。

分析

结论涉及所有三元组。若结论失败，只需抓住一个不能构成三角形的三元组，重新编号后可设 $t_1 \geq t_2+t_3$。记 $S=\sum t_i$，$R=\sum 1/t_i$。展开 SR 后，每对指标产生 $\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}$，一般只能由 AM-GM 得到下界 2。题设右端的临界量是 n^2+1，比通常的 $SR \geq n^2$ 恰好多出 1。因此证明的任务十分具体：利用坏三元组，把涉及 t_1, t_2, t_3 的两对贡献从通常的 4 提高到 5。

证明

反设 $t_1 \geq t_2+t_3$。有

$SR = n + \sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)$.

除 $(1,2),(1,3)$ 外，其余每对至少贡献 2。令 $x = t_1/(t_2+t_3) \geq 1$，则

$\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}+\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1} = x(t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)+\frac{1}{x} \geq 4x+\frac{1}{x} \geq 5.$

故 $SR \geq n+2\left(\binom{n}{2}-2\right)+5 = n^2+1$，与题设矛盾。

区域限制：把变量压到 $[0,1)$

2025 全国高中数学联赛二试 A 卷第 2 题

设 m, n, k 为正整数，$m \geq 2$，$n \geq k \geq 2$，且 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$。若 $\sum_{i=1}^n x_i^m \geq 1$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i \leq k$，证明 $x_1+\cdots+x_k \geq 1$。

分析

条件控制全部 n 项，目标只控制前 k 项，直接估计时尾部难以处理。反设 $t = x_1 + \cdots + x_k < 1$ 后，由排序立即得到 $0 \le x_i < 1$，高次幂于是可以统一降到二次幂：$x_i^m \le x_i^2$。再令 $u = x_k$，前 k 项满足 $x_i \ge u$，尾项满足 $x_i \le u$。这时 u 成为分割前后两段的统一阈值，表达式 $x^m - ux$ 也就自然出现：尾部可用 ux_i 吸收，前部则可用 $x_i - u$ 控制。

证明

反设 $t < 1$，令 $u = x_k$。对 $i > k$，有 $x_i^m \le x_i^2 \le ux_i$，于是

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^m \le \sum_{i=1}^{k} x_i^m + u(k-t), \qquad 1 - ku \le \sum_{i=1}^{k} (x_i^m - ux_i). \tag{1}$$

对 $i \le k$，

$x_i^m - ux_i \le x_i^2 - ux_i = x_i(x_i - u) \le x_i - u.$

由 (1) 求和比较得 $1 - ku \le t - ku$，即 $1 \le t$，矛盾。

符号传播：先排除局部构型

2022 IMO Shortlist A1

设正实数列 $(a_n)_{n\ge1}$ 满足 $a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \le a_n + a_{n+2}$。证明 $a_{2022} \le 1$。

分析

整理条件得

$$a_{n+1}^2 - 1 \le (1 - a_n)(a_{n+2} - 1). \tag{2}$$

右端的符号直接反映 a_n, a_{n+2} 位于 1 的哪一侧。最终目标只涉及一个远处的项，逐项递推并不方便；更有效的是先证明局部结论 “相邻两项不能同时大于 1”。一旦这个局部构型被排除，若 $a_{2022} > 1$，它左右两项的符号便同时确定，原递推式可以在目标位置直接产生矛盾。

证明

若 $a_{n+1} > 1$, $a_{n+2} > 1$, 由 (2) 得 $a_n < 1$。因 $0 < 1 - a_n < 1$, 有 $a_{n+1}^2 - 1 < a_{n+2} - 1 < a_{n+2}^2 - 1$, 故 $a_{n+1} < a_{n+2}$。将 (2) 的指标换成 $n+1$，又得 $a_{n+3} < 1$，并且

$a_{n+2}^2 - 1 \le (a_{n+1} - 1)(1 - a_{n+3}) < a_{n+1}^2 - 1,$

故 $a_{n+2} < a_{n+1}$，矛盾。因此相邻两项不能同时大于 1。

若 $a_{2022} > 1$, 则 $a_{2021}, a_{2023} \le 1$。在 (2) 中取 $n = 2021$, 有 $0 < a_{2022}^2 - 1 \le (1 - a_{2021})(a_{2023} - 1) \le 0$, 矛盾。

尾部统一失败：由“无穷多次”到“从某项起”

2017 IMO Shortlist A2

设 $a_0, a_1, \ldots$ 为任意正实数列。证明

$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$

对无穷多个正整数 n 成立。

分析

“对无穷多个 n 成立” 的否定具有很强的形式：存在 N，使所有 $n > N$ 都满足 $1+a_n \le 2^{1/n}a_{n-1}$。这不是单个指标上的失败，而是一整段尾部同时满足同方向的不等式。先舍去左端的 1，可以得到 a_n 的次幂级增长上界；再回到原不等式，误差项 $(1-2^{-1/n})a_n$ 因增长足够慢而趋于 0，从而相邻项最终被迫以接近 1 的幅度下降。

证明

反设存在 N，使所有 $n > N$ 都有 $1 + a_n \le 2^{1/n}a_{n-1}$。先舍去左端的 1 并连乘：

$a_n \le a_N\, 2^{\sum_{k=N+1}^{n} 1/k} \le Cn^{\ln 2}$,

其中 $C > 0$ 为常数。因此 $a_n/n \to 0$。再由原不等式

$a_{n-1} - a_n \ge 2^{-1/n} - (1-2^{-1/n})a_n$

以及 $1 - 2^{-1/n} \le (\ln 2)/n$，可知右端趋于 1。故充分大的 n 都有 $a_{n-1} - a_n > 1/2$。数列从某项起每步至少下降 $1/2$，与各项恒正矛盾。

量词转换：由“存在”到“对所有”

2024 IMO Shortlist A3

对任意正实数数列 (a_n)，证明至少存在一个正整数 n，使

$R_n := \frac{3^{a_1}+\cdots+3^{a_n}}{(2^{a_1}+\cdots+2^{a_n})^2} < \frac{1}{2024}$.

分析

直接寻找合适的 n 没有明显线索。否定结论后得到 $R_n \ge 1/2024$ 对所有 n 成立，于是所有前缀同时具有统一正下界。接下来只需证明 R_n 不可能始终远离 0。若 (a_n) 无界，前缀最大值会使 R_n 沿某个子序列迅速变小；若 (a_n) 有界，分子至多线性增长而分母是一次和的平方，故 $R_n = O(1/n)$。

证明

反设 $R_n \ge 1/2024$ 对所有 n 成立。令 $M_n = \max_{1\le i\le n} a_i$。由

$\sum_{i=1}^{n} 3^{a_i} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{M_n} \sum_{i=1}^{n} 2^{a_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2^{a_i} \ge 2^{M_n}$,

得 $R_n \le (3/4)^{M_n}$，故 (a_n) 必有界。设 $a_i \le M$，则 $\sum 3^{a_i} \le n3^M$，而 $\sum 2^{a_i} > n$，从而 $R_n < 3^M/n \to 0$，仍与统一正下界矛盾。

无穷远的等号：反设后再用拉格朗日乘数法

Gazeta Matematică B 10/1991

设 $n \geq 3$，正实数 $x_1, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$。证明

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \leq 1.$

分析

约束 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ 的区域无界，直接使用拉格朗日乘数法还缺少极值存在性的说明。事实上，取 $x_1 = t^{n-1}$，$x_2 = \cdots = x_n = t^{-1}$，当 $t \to +\infty$ 时左端趋于 1，无穷远处确有一条逼近等号的路径。若反设某个数组使左端为 $1+\varepsilon$，则其余 $n-1$ 项之和小于 1，所以每一项都大于 ε。这会同时给出所有变量的上、下界，把反例限制到紧集内；最大值取得以后，再用拉格朗日乘数法。

证明

记 $F = \sum_{i=1}^{n} 1/(n-1+x_i)$。反设某个数组满足 $F = 1+\varepsilon > 1$，并考察满足 $x_1 \cdots x_n = 1$，$F \geq 1+\varepsilon$ 的数组。对任意 i，

$\frac{1}{n-1+x_i} = F - \sum_{j \neq i} \frac{1}{n-1+x_j} > \varepsilon.$

故 $x_i < M := 1/\varepsilon - (n-1)$；再由乘积为 1 得 $x_i \geq M^{-(n-1)}$。因此 F 在这组反例中取得最大值，且最大值大于 1。

在最大点处，对约束 $\sum \ln x_i = 0$ 使用拉格朗日乘数法：

$$\frac{x_1}{(n-1+x_1)^2} = \cdots = \frac{x_n}{(n-1+x_n)^2} = \mu > 0. \tag{3}$$

方程 $\mu(n-1+t)^2 = t$ 关于 t 至多有两个正根。若只有一个取值，则由乘积条件 $x_1 = \cdots = x_n = 1$，此时 $F = 1$。否则设 k 个变量等于 u，其余等于 v。由二次方程的根积有 $uv = (n-1)^2$，故可写 $u = (n-1)r$，$v = (n-1)/r$。于是

$F = \frac{k+(n-k)r}{(n-1)(1+r)}$，　　$(n-1)(1+r) - [k+(n-k)r] = (n-k-1) + (k-1)r \geq 0.$

仍有 $F \leq 1$，矛盾。

方法归纳

六道题中，反设分别产生坏子结构、统一区间、符号限制、尾部统一条件、全称下界，以及对无界变量的范围限制。最后一种情形还能保证极值在有限点取得，从而为拉格朗日乘数法补上极值存在性。若反设只得到目标的反向写法，还应继续寻找更具体的中间命题。

精选习题

以下九题按“局部矛盾—递推传播—极值反设—渐近矛盾”的方向逐步展开。部分题还有其他解法；这里关注其中能够独立成篇、且反设确实提供关键条件的路线。

1. 2021 Mongolian MO, Junior P3

固定 $n \geq 3$。若实数列 $a_1, \ldots, a_n$ 对每个 k 都满足 $0 \leq \sum_{i \neq k} a_i \leq 1$, 记 $m = \min a_i$, $M = \max a_i$。求 M 的最大值与 m 的最小值。

2. 2021 Baltic Way P3

求所有正整数列 (a_n)，使 $a_{n+1}^2 = 1 + (n + 2021)a_n$ $(n \geq 1)$。

3. 2023 EGMO P1

设 $n \geq 3$，正实数 $a_1, \ldots, a_n$ 的下标按模 n 理解，并令 $b_i = (a_{i-1} + a_{i+1})/a_i$。已知对任意 i, j, $a_i \leq a_j \iff b_i \leq b_j$。证明 $a_1 = \cdots = a_n$。

4. 1988 IMO Shortlist, SWE 2

设非负实数列 (a_k) 满足 $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{k} a_j \leq 1$。证明 $0 \leq a_k - a_{k+1} < 2/k^2$。

5. 2023 Baltic Way P2

设 $a_1, \ldots, a_{2023}$ 为正实数，且 $a_1 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023$。证明
$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}$.

6. 2023 CAPS Match P2

设实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足 $na_k \geq \sum_{i=1}^{k} a_i^2$ 对每个 $k = 1, \ldots, n$ 成立。证明至少有 $n/10$ 个指标 k 满足 $a_k \leq 1000$。

7. 2024 Belarus–Iran Friendly Competition

设 $n \geq 2$，正实数 $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ 满足 $\sum x_k = 4n$ 且 $\sum 1/x_k = n$。证明 $x_n/x_1 \geq 7 + 4\sqrt{3}$。

8. 2025 Turkish EGMO Selection Test

判断是否存在无穷正实数列 (a_n)，使对每个正整数 n 都有 $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n^2$ 且 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq n^3 + 2025n$。

9. 2025 OFM Senior P1

设 (a_n) 为正整数数列, 并满足下列条件: 任取正整数 $k < \ell$, 若 $m_1, \ldots, m_k$ 两两不同, $n_1, \ldots, n_\ell$ 也两两不同，则
$a_{m_1} + \cdots + a_{m_k} \leq a_{n_1} + \cdots + a_{n_\ell}$.

证明存在正整数 N, b，使得对所有 $n \geq N$ 都有 $a_n = b$。

习题提示

详细解析见七夕特辑——2020-2026 代数 100 题（更新版）

1

先求 M。反设 $M > 1$，删去最小项和最大项，把其余项之和记为 T；“删去最小项” 和 “删去最大项” 的两个条件会给出相反符号。求 m 时作变换 $b_i = 1/(n-1) - a_i$。

2

先验证候选 $a_n = n + 2019$。令 $b_n = a_n - n$。若 $b_n < 2019$，反设 $b_{n+1} \leq b_n$，递推式会给出矛盾；于是 b_n 严格递增且始终低于 2019。$b_n > 2019$ 时同理得到严格递减，再利用整数性。

3

反设并非所有 a_i 相等。在一段最大值的末端取 a_i，使 a_i 最大且 $a_{i+1} < a_i$，则 $b_i < 2$；同序条件推出所有 $b_j < 2$。再用 AM-GM 估计 $\prod b_j$ 或 $\sum b_j$。

4

记 $d_k = a_k - a_{k+1}$。二阶差分条件给出 $d_k \geq d_{k+1}$。若某个 $d_r < 0$，后续差分都保持负且绝对值不减，数列持续增长；得到 $d_k \geq 0$ 后，把 d_k 累计到前 k 项和中。

5

反设目标左端不超过 $1 + 1/2023$。先证明至少一个 $a_i \geq 1$，且这样的指标至多一个；其余 $a_k < 1$，再按指数 k 与 $2024 - k$ 的大小分组比较。

6

可先通过交换逆序对把数列排成非减。设 $M = \#\{k : a_k \leq 1000\}$，反设 $M < n/10$。令 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i^2$，$q_k = S_k/n^2$，由题设推出 $q_{k-1} \leq q_k(1 - q_k)$，再对倒数作递推并求和。

7

由两条和式条件得到 $\sum_{i<j}(x_j/x_i + x_i/x_j) = 4n^2 - n$。反设 $x_n/x_1 + x_1/x_n < 14$，则所有数对的比值和都小于 14。对有序数列建立总和上界，与前式冲突。

8

反设存在。由柯西先估计一次部分和，再把相邻两个部分和的估计相减，得到 a_k 的线性下界；代入平方和后，两边关于 n 的三次项系数不相容。

9

先由题设取一个指标与两个指标，证明数列有界，因此只取有限多个正整数值。若两个不同的值 $b < c$ 都出现无穷多次，可分别选出 $b+1$ 个值为 c 的项与 $c+1$ 个值为 b 的项，题设会给出 $(b+1)c \le (c+1)b$，产生矛盾。最后再用有限值集合与抽屉原理证明数列最终恒定。