2024 年南锥数学奥林匹克

2024-10-05 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_b9accda397792917

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年南锥数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 求证：存在无穷多个四元正整数组 (a,b,c,d)，使得 $ab+1$,$bc+16$,$cd+4$,$da+9$ 均为完全平方数.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，点 A_1,A_2 在边 BC 上，点 B_1,B_2 在边 CA 上，点 C_1,C_2 在边 AB 上，满足 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 为凸六边形，且 B,A_1,A_2,C 在边 BC 上顺次排列.
若存在 $\triangle PQR$，其三边 QR,RP,PQ 上分别存在点 X,Y,Z，使得 $\triangle AB_2C_1\backsimeq\triangle PYZ$，$\triangle BC_2A_1\backsimeq\triangle QZX$，$\triangle CA_2B_1\backsimeq\triangle RXY$，则称 $\triangle AB_2C_1$,$\triangle BC_2A_1$,$\triangle CA_2B_1$ 是“可粘合的”.
求证：$\triangle AB_2C_1$,$\triangle BC_2A_1$,$\triangle CA_2B_1$ 是“可粘合的”当且仅当 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心重合.

3. 求所有正整数 n，使得 3^n-2^n-1 为完全平方数.

第二天

4. 设 N 是一个 $2k$ 位的正整数．它的分块是由第 1 位至第 k 位和第 $k+1$ 位至第 $2k$ 位这两个数字组成的（例如，142856 的分块是 142 和 856）．我们将 N 的反向数定义为调换其分块后形成的数字（例如，142856 的反向数是 856142，1401 的反向数是 114）．若正整数 n 满足以下条件，则称 n 是“塞阿拉数”：n 为偶数位数；n 的两个分块是互质的；n 整除其反向数．求最小的两个“塞阿拉数”.
注：塞阿拉州为巴西东北部一州。

5. 称 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列是“奇妙的”，如果对任意元素 k，其左边至少有 $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ 个元素．对任意正整数 n，求“奇妙的”排列的总个数．

6. 在一个 8×8 的国际象棋盘上有 64 个王，起初，它们都被放在不同的位置上．Alnardo 和 Bernaldo 轮流行动，从 Alnardo 开始．每次行动时，该玩家可以选择一个王，并将其移动至右方、上方或右上方的相邻方格．如果王移动到已有另一个王的方格，这两个王都将被移出游戏．能移走最后两个王或在右上角留下最后一个王的玩家获胜．哪位玩家能确保获胜?